Lycée : Habib Thamer Classe :3 ème Math et Science	SERIE D' EXERCICES N°(7) Continuité et limite	Prof : Regaig Farhat Ascolaire : 2008/2009

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants justifier la continuité de la fonction f en a :

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $(a = 0)$

b) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x} - 2 & \text{si } x \neq 3 \\ f(3) = 1 \end{cases}$; $(a = 5)$

c) $\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = -1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; $(a = 0)$

d) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2 - (x-1)^4}}{x-1} & \text{si } x \in]1,2] \\ f(x) = |x| & \text{si } x \in]-\infty,1] \end{cases}$; $(a = 1)$

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f sur son domaine de définition :

a) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \dfrac{-|x|^3 + x^2}{x+1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty] \\ f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x^3} & \text{si } x \in [-1,1[\end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x^2 + x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1} & \text{si } x \succ 1 \\ f(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} - x & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants la fonction f est elle prolongeable par continuité en x_0 ? Si oui définir ce prolongement.

a) $f : x \mapsto \dfrac{|x| - 3}{x^2 + 3x}$; $x_0 = -3$ b) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x + |x|}$; $x_0 = 0$ d) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$; $x_0 = 1$ e) $f : x \mapsto \dfrac{8x^3 - 1}{x - |x - 1|}$; $x_0 = \dfrac{1}{2}$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Montrer que f est continue en 1

Exercice 5 : :Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} & \text{si } x \neq 3. \\ f(3) = a & \text{(a réel donné).} \end{cases}$ Déterminer a pour que f soit continue en 3.

Exercice 6 : On considère la fonction f définie par $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + x - 1}{x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est continue en tout réel non nul.
3) a) Montrer que pour tout réel x non nul $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2} - x + 1}$

   b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 7: Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{5 + 4x} - 2x - 1}{x - x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = m & (\text{où } m \in IR) \end{cases}$

1) Déterminer D_f.
2) Déterminer m pour que f soit continue en 0.
3) Donner alors suivant les valeurs de m, le domaine de continuité de f
4) Soit g la fonction définie par $g(x) = (x - 1)^2.f(x)$ Etudier la continuité de g en 1.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Peut-on-parler de la continuité de f en 0 ?
3) Vérifier que f est continue à droite en 1 et continue à gauche en (– 1).

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[. \\ f(x) = x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x + 4 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1.
2) f est-elle continue en -1.
3) Déterminer les intervalles sur les quels f est continue.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2+4x+2x}{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\\ f(x) = x^2+x+1 & \text{si } x \in [-1,-1] \\ f(x) = 2\sqrt{x^2-1} - x + 4 & \text{si } x \in]-1,+\infty[\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1.
2) . f est-elle continue en -1.
3) Déterminer les intervalles sur les quels f est continue.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = -1 + \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 + \dfrac{x^2+3x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Soit g la fonction définie par g (x) = |x|.f (x) Montrer que g est continue en 0.

Exercice 8 :

Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-x-6} + ax & \text{si } x \leq -2 \quad \text{(a est un paramètre réel)} \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est continue en 2.
3) Déterminer le réel a pour que f soit continue en -2.
4) On prend dans la suite a = $-\dfrac{1}{4}$. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.