Lycée : Habib Thamer

Prof : Regaieg Farhat — **Classe :** 3ème Math + Sc

Série d'exercices N°6 (Trigonométrique)

Exercice 1 :

Exprimer en fonction de cos x ou sin x les nombres suivants :

a) $\cos(3\pi + x)$; b) $\sin(-x-\pi)$; ; c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$;

d) $\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)$ e) $\sin(11\pi - x)$; f) $\cos\left(x-\frac{9\pi}{6}\right)$

g) $\cos(\pi - x) + \cos(x - 3\pi)$; h) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$;
i) $\sin(-x) - \cos(-x)$; j) $\sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$;
k) $\cos(-\pi - x) + \sin(x - \pi) + \sin(4\pi - x)$

Exercice 2 :

1) Soit t un réel tel que $\sin t = \frac{3}{5}$.

Calculer cos t dans chacun des cas suivantes :

a) $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; b) $t \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

2) t est un réel tel que $\cos t = -\frac{1}{3}$.

Calculer sin t dans chacun des cas suivants :

a) $t \in [0 ; \pi]$; b) $t \in]-\pi ; 0]$.

Donner une valeur approchée de t à 10^{-2} près dans chaque cas.

Exercice 3 :

On donne $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Calculer $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

En déduire les lignes trigonométriques de : $\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{7\pi}{8};\frac{9\pi}{8}$

Exercice 4 :

Résoudre dans$]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

a) $4\cos^2x - 3 = 0$; b) $\sin^2x - \frac{1}{2} = 0$; c) $\tan^2x = 3$

Exercice 5 :

A l'aide du cercle trigonométrique sur lequel on représentera les solutions, résoudre les inéquations suivantes :

1) Dans$]-\pi ; \pi]$: a) $\sin x \geq 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.

2) dans $[0 ; 2\pi[$: a) $\sin x < 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.

Exercice 6 :

Résoudre dans$]-\pi ; \pi[$ les inéquations suivantes :

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$;b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;c) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Même question en donnant les solutions dans $[0 ; 2\pi[$.

a) $\cos x \leq -1$; b) $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

Exercice 7 :

On veut résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x = \sin x$ dans $[0 ; 2\pi[$.

a) Démontrer que x est aussi solution de $\cos^2x = \frac{1}{4}$

b) Résoudre l'équation $\cos^2x = \frac{1}{4}$ dans $[0 ; 2\pi[$.

c) En déduire les solutions de l'équation (on remarquera que cos x et sin x doivent avoir le même signe).

Exercice 8 :

Résoudre dans$]-\pi ; \pi]$ les équations données et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos 2x = 1$; b) $\sin 2x = 0$; c) $\sin 2x = -1$; d) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

Exercice 9 :

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ les équations suivantes :

a) $\cos 2x = \sin x$; b) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

Exercice 10 :

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I.Représenter les points aux solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $I =]-\pi ; 2\pi]$ b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $I =]-\pi ; \pi]$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $I = [0 ; 2\pi[$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $I = [0 ; 2\pi[$

e) $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$; $I = [-2\pi ; 0[$ f) $\cos x = -\cos\frac{\pi}{4}$; $I\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

g) $\sin x = 1$; $I = [0 ; 2\pi]$ h) $\cos x = -1$; $I = [-\pi ; \pi]$.

Exercice 11 :

x désigne un réel quelconque. Simplifier les expressions :

1) a) $A = \cos x + \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $B = \sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

2) a) $A' = \cos^2x + \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

b) $B' = \sin^2x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

3) On considère les points M,N et P du cercle trigonométrique repérés par les réels x, $x + \frac{2\pi}{3}$, $x + \frac{4\pi}{3}$.

Quelle est la nature du triangle MNP ? quel est son centre de gravité ? en déduire la valeur de $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ et retrouver le résultat de la question 1).

Exercice 12 : Egalité diverses :

Etablir les égalités suivantes :

a) $\cos^4x - \sin^4x = \cos 2x$.

b) $\cos^4x + \sin^4x + \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1$.

c) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$; (x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$).

d) $(\cos x + \sin x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \cos^3x + \sin^3x$.

e) $\cos^2x \sin^2x = \frac{1-\cos 4x}{8}$

Exercice 13 :

1) Exprimer $\sin^2 2x$ et $\cos^2 2x$ en fonction de $\cos 4x$.

2) Démontrer que $\cos^4x + \sin^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.

Exercice 14 :

On suppose que x est différent de $\frac{k\pi}{2}$ avec k élément de Z.

a) Démontrer que $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

b) Démontrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ est une constante.

Exercice 15 :

Soit P = cos x cos 2x cos 4x, où x désigne un réel.

a) Démontrer que : P × sin x = $\frac{1}{2}$ (sin 2x)(cos 2x)(cos 4x)

= $\frac{1}{8}$ sin 8x.

b) En remplaçant x par $\frac{\pi}{7}$, démontrer que : $\cos\frac{\pi}{7} \times \cos\frac{2\pi}{7} \times \cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

Exercice 16 :

1) Démontrer que :

a) $\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} = 0.$

b) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2.$

2) Déterminer: $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$

Exercice 17 :

Soit f : IR → IR; $x \mapsto 1+\cos 2x - \sin 2x$

1) a) Montrer que f(x) = $2\sqrt{2}$ cosx $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans [0, π] : f (x) = 0 et f (x) > 0

2) g : $[0,\pi] \to$ IR; $x \mapsto \frac{\sin 2x - 1}{1+\cos 2x - \sin 2x}$

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Résoudre dans [0, π] : g (x) ≥ 0

3) a) Montrer que pour tout x ∈ D_g : g (x) = $\frac{1}{2}$ (tanx – 1)

b) En déduire que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$

Exercice 18 :

Soit l'application f : $[0,\pi] \to IR$

$x \mapsto -2\sin^2 x - (\sqrt{3}+2)\cos x + \sqrt{3} + 2$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

2) Soit α l'élément de [0,π] tel que tan α = $-\sqrt{2}$. Calculer cos α ; tan α puis f(α).

3) Montrer que pour tout x ∈ [0,π] ; f(x) = 2cos²x – ($\sqrt{3}$ + 2) cos x + $\sqrt{3}$

4) Résoudre dans [0,π] l'équation f(x) = 0 puis l'équation 2cos²x – ($\sqrt{3}$ + 2) |cos x| + $\sqrt{3}$ = 0

5) Résoudre dans [0,π] l'inéquation f(x) > 0

6) Dans cette question x désigne un élément de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que (cosx – sinx) ² + (cosx + sinx) ² = 2

b) Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f(\pi - x)$ à l'aide de cosx et sinx.

c) Résoudre l'équation $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f(\pi - x) = \sqrt{3}$

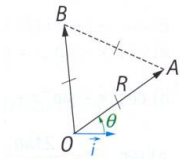
Exercice 19 :

1) Démontrer que cos x – $\sqrt{3}$ sin x = 2 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans [0 ; 2π[les équations :

a) cos x – $\sqrt{3}$ sin x = - 1 ; b) cos x – $\sqrt{3}$ sin x = 0.

Exercice 20 :



On considère un point A de coordonnées polaires (R, θ) dans $(O;\vec{i})$. Soit B tel que OAB est un triangle équilatéral direct.

a) Déterminer les coordonnées polaires de B dans $(O;\vec{i})$.

b) En déduire que les coordonnées cartésiennes de B sont :

$x_B = R\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$; $y_B = R\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

Application

Déterminer les coordonnées cartésiennes de B, connaissant celle de A dans $(O,\vec{i},\vec{j})$;

a) A(2 ; 3) ; b) A(1 ; -1)

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 21 :

Dans le repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le point M de coordonnées (2 $\sqrt{3}$; 2)

1) Déterminer des coordonnées polaires de M dans $(O,\vec{i})$.

2) On considère le point N tel que : $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = \frac{3\pi}{4}(2\pi)$ et ON = $\frac{1}{2}$ OM

Déterminer des coordonnées polaires de N dans le repère $(O,\vec{i})$

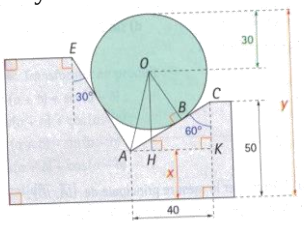
3) En utilisant les formules d'addition, calculer : $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

En déduire les coordonnées cartésiennes de N dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Déterminer la distance MN et une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MN})$

Exercice 22 :

Une pièce métallique est entaillée selon l'angle $E\hat{A}C$. On place un cylindre de rayon 30 mm comme ci-dessous :



1) Calculer la tangente de l'angle $K\hat{A}C$
2) Calculer, à 10^{-2} près par défaut, la cote x.
3) Calculer OH, puis en déduire la cote y à 10^{-2} près par défaut.