Lycée : Habib Thamer Classe :3 ème Math et Science	**SERIE D' EXERCICES N°(9)** *Limite et comportement asymptotique*	Prof : Regaig Farhat Ascolaire : **2008/2009**

Exercice 1:

Soit f une fonction continue sur IR . On note ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit Δ la droite d'équation : y = x-3 .
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1°) Si Δ est asymptote à ξ_f en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

2°) Si Δ est asymptote à ξ_f en $+\infty$, alors ξ_f ne peut admettre d'asymptote horizontale.

3°) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$, alors Δ ne peut pas être asymptote à ξ_f .

4°) Si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, alors Δ est asymptote à ξ_f en $+\infty$.

Exercice 2:

Soit la fonction f définie par : f (x) = $\frac{2x^2-x-1}{x+5}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition D_f de f, f (x) = ax + b + $\frac{c}{x+5}$
2) En déduire que la courbe (ζ) représentative de f dans un repère donné possède deux asymptotes.

Exercice 3:

Soit la fonction f définie par : f (x) = $\sqrt{x^2-6x+10}+2x+2$
Montrer que les droites d'équations y = 3x – 1 et y = x + 5 sont asymptotes à la courbe (ζ) représentative de f dans un repère donné

Exercice 4:

Soit la fonction f définie par : f (x) = $\begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1+\frac{6}{x-3} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) Montrer que $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$
2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Montrer que la courbe représentative de f dans un repère donné possède trois asymptotes.

Exercice 5:

Soit la fonction f définie par : f (x) = $\frac{-x^2+5x-7}{x-4}$

1) Vérifier que : $\forall$ x $\in$ IR \ {4}, f (x) = $-x+1-\frac{3}{x-4}$
2) En déduire que la courbe (ζ) représentative de f dans un repère donné a deux asymptotes.

Exercice 6:

On considère la fonctions f définie par f (x) = $\sqrt{x^2+6x+8}$ et (ζ) sa courbe dans un repère orthonormé direct R $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3) a) Mettre sous forme canonique x² + 6x + 8
   b) Déterminer alors $\lim_{x\to-\infty} f(x)+(x+3)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+3)$
   c) Interpréter graphiquement les résultats précédents
4) a) Montrer que pour tout réel x on a : x² + 6x + 8 < (x + 3)²
   b) En déduire les positions relatives de (ζ) par rapport à ses asymptotes.

Exercice 7:

On considère la fonction f définie par f (x) = $\frac{\sqrt{9+x^2}-(x-3)}{x}$ et (ζ) sa courbe dans un repère orthonormé direct R $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f admet une asymptote verticale D dont on donnera une équation.
3) a) Montrer que pour tout x > 0 on a : f (x) = $\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-1+\frac{3}{x}$
   b) Calculer alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 8:

Soit f(x) = $\sqrt{x^2-2x-3}$ .On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Déterminer D_f
   b) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$

2) a) Vérifier que : $\forall$ x $\in$ D_f ; f(x) = $\sqrt{(x-1)^2-4}$
   b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x+1\right]=0$
   c) En déduire que la courbe ζ admet deux asymptotes obliques D et D'.

Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = x – 1 + $\sqrt{x^2+1}$ et ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Montrer que la droite Δ : y = 2x – 1 est une asymptote à ζ au voisinage de + ∞.

Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur IR par : f(x) = $\dfrac{x^3}{3x^2-6x+4}$

Soit ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Trouver les réels a, b, c et d tels que pour tout x $\in$ IR f(x) = ax + b + $\dfrac{cx+d}{3x^2-6x+4}$
2) Montrer que ζ_f admet une asymptote oblique Δ qu'on déterminera. Etudier la position relative de ζ_f par rapport à Δ.

Exercice 11:

On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à]-∞ ; - 1[$\cup$]-1 ; 1[$\cup$]1 ; + ∞[par : f(x) = $\dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$

On note ζ_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que pour tout réel x $\neq$ - 1 et x $\neq$ 1 on a : f(x) = a + $\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Préciser les asymptotes à ζ_f.

Exercice 12:

Les courbes ci contre sont les représentations des fonctions f_i ; les asymptotes sont en vert.
Associer à chacune des fonctions suivantes son graphique sans utiliser la calculatrice :

$f_1(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $f_2(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$;

$f_3(x) = -x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $f_4(x) = -x-1+\dfrac{1}{x^2}$

$f_5(x) = |x| + \dfrac{1}{x}$; $f_6(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x}$