Prof : Zayoud Abidi 3 Math

Chapitre n° 4 : Rotations du plan

Résumé du cours

1-Définition :

Soit I un point du plan P et α un réel donné. On appelle **rotation de centre I et d'angle** α et on la note $r(I,\alpha)$, l'application du plan P dans lui même qui à tout point M de P/{I} associe le point M' définie par :

$$IM' = IM \text{ et } \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

On a donc : $r(I,\alpha)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM = IM' \\ \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$

Remarques :

1) Si $\alpha \equiv 0(2\pi)$, alors $r(I,0) = Id_p$

2) Si $\alpha \equiv \pi(2\pi)$, alors $r(I,\pi) = S_I$

2-Propriétés :

Théorème 1 :
Le centre d'une rotation d'angle non nul est l'unique point invariant par cette rotation .

Théorème 2 :
Toute rotation $r(I,\alpha)$ du plan est une bijection du plan P dans lui même et sa réciproque est la rotation de centre I et d'angle $-\alpha$. On a ainsi : $r^{-1}(I,\alpha) = r(I,-\alpha)$

Théorème 3 :
Toute rotation du plan P conserve :

- La distance.
- Les milieux.
- Le barycentre.
- La mesure des angles orientés.
- L'orthogonalité.
- Le parallélisme.
- Le contacte.

Conséquences :

- L'image d'un cercle C de centre O et de rayon R par une rotation r est un cercle C' de centre O' = r(O) et de même rayon R.
- L'image d'un segment [AB] par une rotation r est le segment [A'B'] avec A' = r(A) et B' = r(B).

Théorème 4 :
Soit θ un réel tel que : $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et f une application du plan P dans lui même, f est une rotation dont une mesure de l'angle est θ si et seulement si :
Pour tout couple (M,N) de points distincts du plan P, d'image (M',N') par f on a :

$$\begin{cases} MN = M'N' \\ et \\ \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Remarque :
Une rotation r du plan est entièrement déterminée par la connaissance des images de deux points distincts du plan P.

En effet : Soit A et B deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par une rotation r de centre I et d'angles θ. Alors on a :

- $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ }\ \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta (2\pi)$
- $\{I\} = méd[AA'] \cap méd[BB']$.

3-Composée de deux rotations de même centre :

Théorème :

Soient $r(I,\theta)$ et $r'(I,\theta')$ deux rotations du plan P de même centre I et d'angles des mesures respectives θ et θ'. Alors la composée : $r(I,\theta) o\, r'(I,\theta') = r'(I,\theta') o\, r(I,\theta) = r(I,\theta+\theta')$.

4-Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants :

Théorème :

Soit S' et S deux symétries orthogonales d'axes respectifs D' et D , sécantes en A et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{U'}$ et $\overrightarrow{U}$.

Alors on a : $S' o S = r\left(A, 2\left(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{U'}}\right)\right)$

5-Décomposition d'une rotation en composée de deux symétries orthogonales :

Théorème :

Soit θ un réel ; $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et I un point du plan P. La rotation r de centre I et d'angle θ est la composée de deux symétries orthogonales d'axes respectifs D et D' sécantes en I et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{U'}$ tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{U'}}\right) = \frac{1}{2}\theta + k'\pi; k' \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

La décomposition d'une rotation en composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants n'est pas unique .