M^r SOUID.N — **Serie N°8** — 3.MATH

EXERCICE N°1

Soient $f(x) = 1 - \cos x + \sin x$ et $g(x) = 1 + \cos x + \sin x$

1) a/Montrer que $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})$ et que $g(x) = 2\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})$

b/Montrer que $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

c/En déduire $\sin\frac{\pi}{12}$

2)Posons $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Montrer que $h(x) = \tan\frac{x}{2}$. En déduire $\tan\frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°2

I) Montrer que $2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + \sin 2x$

II)1/ Montrer que $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{18} = \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

2/Calculeralors $A = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{18}}$

III)1/ Montrer que $2\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$

2/ Montrer que $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2$

3/ Montrer que $\frac{\sin 3x}{\cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x} = 2$

EXERCICE N°3

1) Montrer que pour tout réel x on a

$B = \sin^6 x + \cos^6 x - \frac{3}{8}\cos(4x) = \frac{5}{8}$

2)Déduire alors $\sin^6\frac{\pi}{16} + \cos^6\frac{\pi}{16}$

EXERCICE N°4

1) Montrer que pour tout réel x on a

$\sin(4x) = \sin x(8\cos^3 x - 4\cos x)$

2)Déduire que $8\cos^3(\frac{\pi}{5}) - 4\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$

3)a)Vérifier que $8x^3 - 4x - 1 = (2x + 1)(4x^2 - 2x - 1)$

b)Déduire que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

EXERCICE N°5

Posons $a=\cos\frac{4\pi}{5}$ et $b = \cos\frac{2\pi}{5}$

1) Soit $f(x) = \sin 2x + \sin 3x$

a) Vérifier que $f\left(\frac{4\pi}{5}\right) = f\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0$

b) Vérifier que $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$ et que $f(x) = \sin(x)\,(4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1)$

c)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

En déduire que $a = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$; $b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et que $ab = -\dfrac{1}{4}$

EXERCICE N°6

Soit $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2(2x)$

1) Montrer que f est constante

2) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$l'équation $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$

EXERCICE N°7

On considère

$A(x) = \cos^2 x + \cos^2(x + \dfrac{2\pi}{3}) + \cos^2(x - \dfrac{2\pi}{3})$ et $B(x) = \sin^2 x + \sin^2(x + \dfrac{2\pi}{3}) + \sin^2(x - \dfrac{2\pi}{3})$

1/ Calculer A(x) + B(x) et A(x) – B(x)

2/ En déduire A(x) et B(x)

EXERCICE N°8

1/ Montrer que $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 2\cos(\dfrac{\pi}{3} + 3x)$

2/ Résoudre dans IR $\sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x - 1$

EXERCICE N°9

1) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$\sin x = -\frac{1}{2}$; $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2x = \sin(x+\frac{\pi}{6})$; $\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{6})$; $\cos x = -\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

2) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$\cos x < -\frac{1}{2}$; $\sin(x+\frac{\pi}{6}) < 0$; $\cos(x-\frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(x+\frac{\pi}{6}) \le 1$