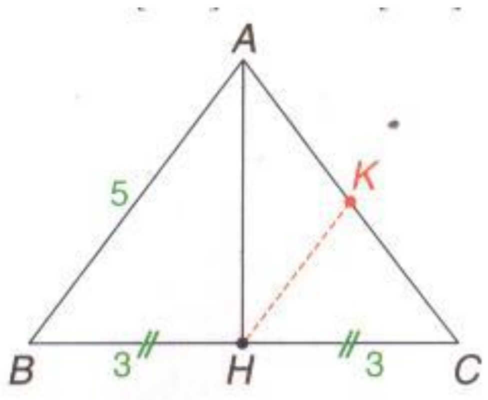
Lycée : Habib Thameur		
Prof : Hamdi-Regaieg Classe :3 ème Math 2-3	DEVOIR DE SYNTHESE N° 1	Date : 3 / 12 / 2008 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Q-C-M (3 points)

ABC est un triangle isocèle en A tel que AB = 5 et BC = 6. H est le milieu de [BC] et K est le milieu de [AC].

Pour chacune des questions posées, reconnaitre l'affirmation exacte.



1) Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{KH}\right)$ est :

a π b 0 c $\frac{\pi}{2}$

2) La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HC}\right)$ est :

a $\frac{\pi}{2}$ b $-\frac{\pi}{2}$ c $\frac{3\pi}{2}$

3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=$:

a 21 b 27 c 9

4) L'ensemble des points M tels que $MB^2-MC^2=-36$ est :

a Une droite passant par B b Une droite passant par C. c Une droite passant par A.

Exercice 2 : (4 points)

Dans le repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère le point M de coordonnées $\left(2\sqrt{3};2\right)$.

1) Déterminer les coordonnées polaires de M.

2) On considère le point N tel que : ON = $\frac{1}{2}$OM et $\left(\widehat{\overline{OM},\overline{ON}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. Déterminer les coordonnées polaires de N.

3) Calculer $\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}$ puis à l'aide des formules de transformation calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

4) Déterminer les coordonnées cartésiennes de N dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Exercice 3 : (4 points)

Soit f(x) = $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2 x-2$; (x $\in$ IR)

1) a) Vérifier que : $2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$ et $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$

b) En déduire que : f(x) = cos 2x – sin 2x

2) Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (Indication : On vérifiera que $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$)

3) a) Montrer que f(x) = $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation f(x) = $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Exercice 4 : (4 points)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x-x^2} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{8(\sqrt{x}-1)} & \text{si } x>1 \\ f(1)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) a) Vérifier que pour tout x∈]1 ; + ∞ [on a $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{8}$

   b) Etudier la continuité de f à droite et à gauche de 1.

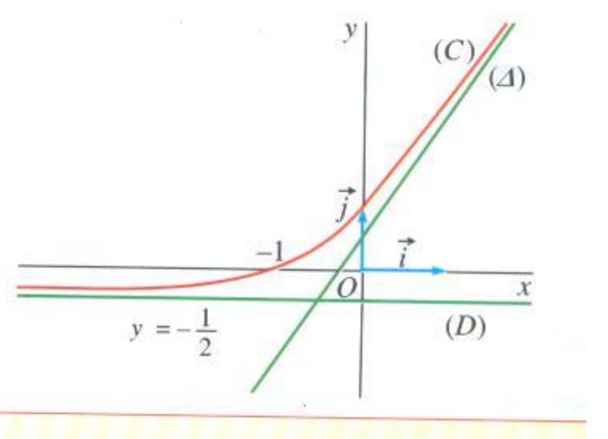
3) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles] $-\infty$; 0 [et] 0 ; + ∞[.

4) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifier.

Exercice 5 : (5 points)

Dans le graphique ci-contre (C) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.

- La droite D : $y = -\dfrac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- La droite Δ : $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.



I) Par une lecture graphique.

1) Déterminer le signe de f(x).
2) Déterminer le sens de variations de f.
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)\right]$

II) On admet que la fonction f est définie sur IR par $f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Vérifier que pour tout x strictement négatif : $f(x)=\dfrac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$

   b) En déduire la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Soit g(x) = f(x) – (2x + $\dfrac{1}{2}$).

   a) Vérifier que $g(x)=\dfrac{3}{4(\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2})}$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.