Exercice N :1 on donne la fonction

$$F : x \to \begin{cases} \dfrac{x|x-2|}{(x-2)(|x|+1)} \; si x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de continuité de f .
2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer la fonction dérivée de f.
3) Soit A le point de C_f d'abscisse –1.
   a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point A.
   b) Existe-t-il un point B de C_f ou la tangente est parallèle à T ?

Exercice N :2 On donne les fonctions :

$g : x \to -\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$ et $h : x \to \dfrac{x}{x-\sqrt{x}-2}$

1) Déterminer les domaines de définition de g et h
2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g en son point d'abscisse 1.
3) Existe-t-il un point M de la courbe de g où la tangente passe par l'origine O du repère ?
4) Vérifier que pour tout réel $x \in D_g \cap D_h$ on a :
   $g'(x)=[h'(x^2)] \times 2x$

Exercice N :3

A/ Soit P un polynôme et $a \in IR$.
1) Montrer que s'il existe un polynôme Q tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-a)^2 Q(x)$,
alors P'(a)=0.
2)Réciproquement :si le polynôme P vérifie : P(a)=P'(a)=0, montrer que P(x) est factorisable par $(x-a)^2$.

Application

a) Montrer que : $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$ est factorisable par $(x-2)^2$. Le factoriser complètement.
b) Soit P un polynôme de degré 3 admettant 3 racines distinctes x_1, x_2 et x_3.

i) Contrôler à l'aide de ce qui précède que P' ne s'annule ni en x_1,ni en x_2,ni en x_3 .

ii)Montrer que : $\dfrac{x_1}{P'(x_1)} + \dfrac{x_2}{P'(x_2)} + \dfrac{x_3}{P'(x_3)} = 0$

B/Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le polynôme $x^3 + px + q$ soit tel que :
1) Le polynôme dérivé admette des racines.
2) Le polynôme et le polynôme dérivé admettent une racine commune.

Exercice N :4 Soit la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1} \; si x \in]-\infty,0[\cup[3,+\infty[\\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 1, si x \in [0,3[\end{cases}$$

1)f est-elle continue en 0 ?
2)f est-elle dérivable en 0 ?
3)Ecrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A(0,1).
4)Déterminer le signe de f(x)-(-x+1) dans chacun des intervalles : [-1,0[et [0,1[.
5)f est-elle dérivable en 3 ?
Interpréter graphiquement le résultat.
6) Déterminer f'(x) pour $x \in]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$ et pour $x \in]0,3[$
7)Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$:
2f'(x)+(x-1)f''(x)=0.

Exercice N :5 Soit $f(x)=ax^2+bx+c$
Déterminer a, b et c pour que la courbe de f passe par les points $A(1,\dfrac{3}{2})$,$B(-1,-\dfrac{5}{2})$ et tangente à la droite D : 2x-2y-3=0.

Exercice N :6 Soit la fonction $f(x)=x^2(3-x)$.
1)Déterminer la fonction dérivée f' de f .
2)Soit (C) la courbe de f et $I(1,f(1)) \in (C)$.
a)Donner une équation de la tangente T à C en I.
b)Etudier les positions relatives de C et T.
c)Montrer que pour tout réel x on a f(2-x)=4-f(x)
3)Soit la droite D_m :y+9x-m=0.(m paramètre réel
a)Pour quelles valeurs de m D_m est-elle tangente à la courbe C ?
b)Pour ces valeurs de m trouvées, montrer que les deux droites sont symétriques par rapport à I.

Exercice N :7 Déterminer les coefficients a,b et c d'une fonction f définie par $f(x) =ax^2+bx+c$ de telle façon que la courbe de f soit tangente aux droites :
D_1 :y=4x+1 ; D_2 :y=16x-23 et
D_3 :y=-8x+1.

Exercice N :8 Soit la fonction f définie par :
$f(x)=\dfrac{(2m+1)x+5m+7}{x+m+3}$,avec $m \in R$.
Pour quelle valeur de m la courbe de f est-elle tangente à la droite d'équation :y=-4x-1 ?
Déterminer alors le point de contact.