Exercice n°1 :

Dans cet exercice la justification n'est demandée. On répondra à chaque question.

- Chaque réponse exacte rapporte 1 point.
- Chaque réponse inexacte enlève 0,25 point.
- Une question sans réponse enlève 0,5 point .
- Si le total est négatif, il est ramené à zéro.

Pour chaque question, donner la seule réponse exacte

Soit f une fonction définie et continue sur $]-6\,;-3[\,\cup\,]-3\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous et (C) sa représentation graphique dans un repère.

x	-6	-4	$-3{,}5$	-3	2	$+\infty$
variations de f	‖ 7 ↗	8 ↘	0 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	3 ↗	5

1. On peut affirmer que :

a) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ c) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 0$

2. (C) admet pour asymptotes les droites d'équation :

a) $x = 5$ et $y = -3$ b) $y = 8$ et $y = 3$ c) $x = -3$ et $y = 5$ d) $x = -6$ et $y = 5$

3. Dans l'ensemble $]-6\,;-3[\,\cup\,]-3\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 4$ admet exactement :

a) 0 solution b) 1 solution c) 2 solutions d) 3 solutions

Exercice 2

Soient A, B, C, D et E cinq points du plan tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi],\ \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}}\right) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi] \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}}\right) \equiv \frac{\pi}{15}[2\pi]$$

(la figure n'est pas demandée)

1. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EC})$.

2. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AB})$.

3. En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC})$.

Que peut-on en déduire pour le triangle BEC ?

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3. Soit I le milieu de [AB] et J celui de [IC].
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité (1) : $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$.

On se propose de déterminer la nature de l'ensemble (Γ) de deux façons.

Partie A - 1ère méthode

1. Montrer que $B \in (\Gamma)$.

2. En utilisant deux fois le théorème de la médiane, démonter que :

$M \in (\Gamma)$ si et seulement si : $4MJ^2 + \frac{1}{2}AB^2 + IC^2 = 66$.

3. En déduire la nature et les éléments caractéristique de (Γ) et le représenter.

Partie B - 2ème méthode

On utilise le repère orthonormé $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$.

1. a) Déterminer les coordonnées des points B et C.

b) En utilisant l'égalité (1), déterminer une équation de (Γ) dans ce repère.

2. Retrouver la nature et les éléments caractéristique de (Γ) trouvés avec la première méthode.

Exercice n°1 :

1. b) est la réponse exacte

En effet :

a) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5)$ puis que f est continue en 5. 1. a) est une réponse fausse.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ 1. b) est la réponse exacte

c) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = 7$ 1. c) est une réponse fausse.

d) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ 1. d) est une réponse fausse.

2. c) est la réponse exacte

En effet :

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation y = 5 est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$

et la droite d'équation x = -3 est asymptote verticale à (C).

3. d) est la réponse exacte

f est continue sur $]-6\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.

l'image de l'intervalle]-6,-4] par f est]7,8] et 4 n'appartient pas à]7,8] donc l'équation f(x) = 4

de solution dans] -6 ; -4].

l'image de l'intervalle [-4,-3[par f est $]-\infty,8]$ et 4 appartient pas à $]-\infty, 8]$. D'autre part, f est croissante sur [-4, -3[donc admet exactement une seule solution dans [-4, -3[.

l'image de l'intervalle]-3, 2] par f est $]-\infty,3]$ et 4 appartient pas à $]-\infty,3]$; d'autre part , f est strictment décroissante sur]-3, 2] donc admet exactement une seule solution dans]-3, 2].

l'image de l'intervalle $[2, +\infty[$ par f est $[3, +\infty[$ et 4 appartient pas à] $[2, +\infty[$; d'autre part , f est strictment décroissante sur $[2,+\infty[$ donc admet exactement une seule solution dans $[2, +\infty[$.

Il en résulte que l'équation f(x) = 4 admet exactement trois solution dans $]-6\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.

Exercice 2 :

1. $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EC}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}}\right)[2\pi]$

$$\equiv -\pi + \frac{\pi}{15}[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{14\pi}{15}[2\pi]$$

2. $\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EB}}\right)[2\pi]$

$$\equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{2\pi}{5}[2\pi]$$

3. $\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

$$\equiv -\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{6} - \frac{14\pi}{15}[2\pi]$$

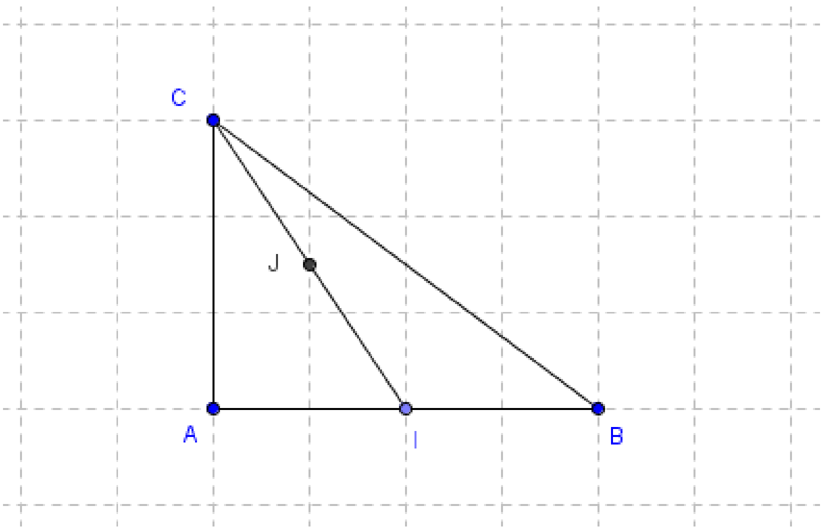
$$\equiv -\frac{45\pi}{30}[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{3\pi}{2}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

On en déduit que le triangle BEC est rectangle en E et de sens indirect.

Exercice 3 :



Partie A

1. Pour qu'un point M du plan appartienne à l'ensemble (Γ), il faut et il suffit que : $MA^2+MB^2+2MC^2=36$.

Comme $BA^2+BB^2+2BC^2=AB^2+2AC^2=16+18=36$ alors $B\in(\Gamma)$.

2. $M\in(\Gamma)\Leftrightarrow MA^2+MB^2+2MC^2=36\Leftrightarrow 2MI^2+\frac{AB^2}{2}+2MC^2=36$

$$\Leftrightarrow 2\left(MI^2+MC^2\right)+\frac{AB^2}{2}=36\Leftrightarrow 2\left(2MJ^2+\frac{IC^2}{2}\right)+\frac{AB^2}{2}=36$$

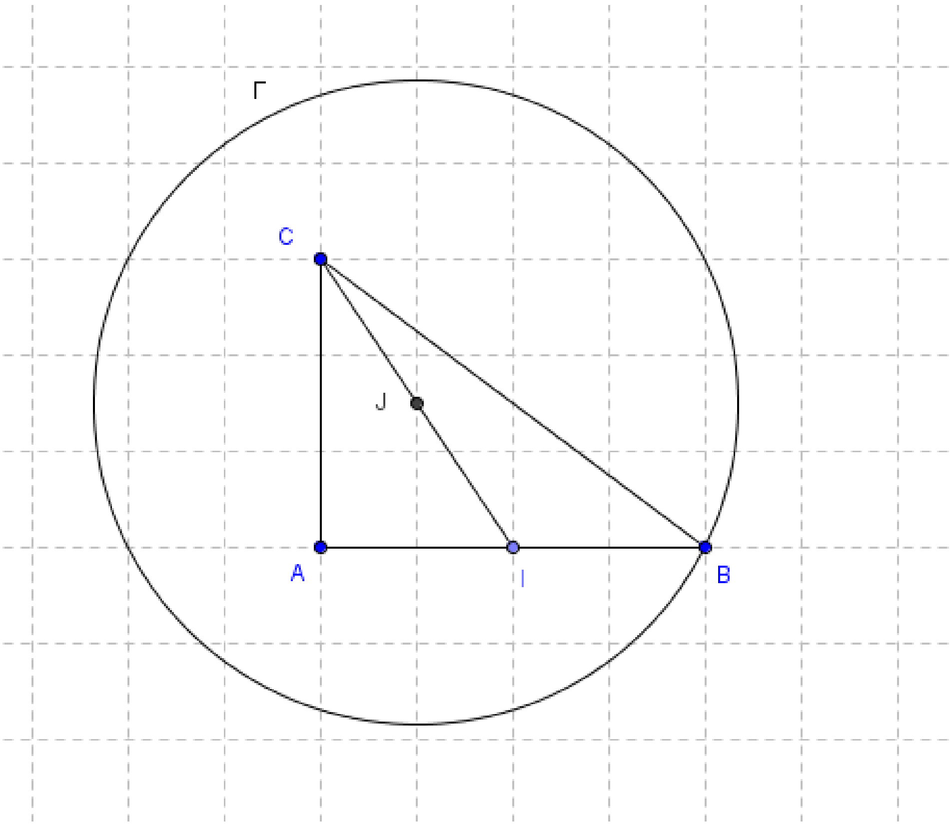
$$\Leftrightarrow 4MJ^2+IC^2+\frac{AB^2}{2}=36$$

3. $M\in(\Gamma)\Leftrightarrow 4MJ^2+IC^2+\frac{AB^2}{2}=36\Leftrightarrow 4JM^2+\left(AI^2+AC^2\right)+8=36$

$$\Leftrightarrow 4JM^2+21=36\Leftrightarrow JM^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow JM=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Par suite , l'ensemble (Γ) est le cercle de centre J et de rayon $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Pour représenter (Γ), il suffit de tracer le cercle de centre J et passant par B.



Partie B.

1. a) Rappelons que : $M(x,y) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + y\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

   Comme $\overrightarrow{AB} = 4.\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = 4.\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 0.\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors B(4, 0).

   D'autre part $\overrightarrow{AC} = 3.\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = 0.\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3.\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc C(0, 3).

   b) $M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 36$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + 2\left[x^2 + (y-3)^2\right] = 36$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4y^2 - 12y + 34 = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y - \frac{1}{2} = 0$$

Donc une équation de (Γ) dans le repère $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ est $x^2 - 2x + y^2 - 3y - \frac{1}{2} = 0$

2. $x^2 - 2x + y^2 - 3y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

   Il en résulte que (Γ) est le cercle de centre le point $\Omega\left(1, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Il reste à vérifier que $\Omega = J$.

On sait que C(0, 3) et I milieu de [AB] donc I(2, 0). On en déduit que J milieu de [CI] a pour abscisse $x_J = \frac{2+0}{2} = 1$ et pour ordonnée $y_J = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$.

Ainsi $\Omega = J$.