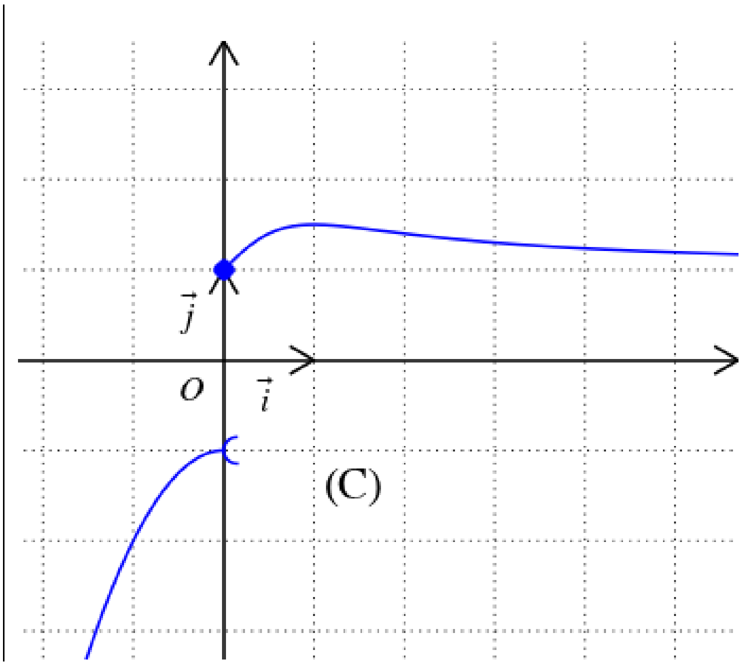
Lycée IBN KHALDOUN	Devoir de Contrôle N°1 26/10/2011	Niveau : 3ème Maths 1
Mr ABIDI Farid		Durée : 2 heures

Exercice 1: (4 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux propositions suivantes en justifiant la réponse.

1. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls du plan tels que $\left(\vec{u},\vec{v}\right) \equiv \frac{19\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\vec{u},\vec{w}\right) \equiv -\frac{32\pi}{3}[2\pi]$, alors les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens.
2. Soit ABC est un triangle isocèle et rectangle en A tel que AB = a, $a > 0$. On note I le milieu de [BC]. Si M est un point de la droite (AI) alors $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = a^2$.
3. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan . Ci-contre est tracée la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

   La fonction |f| est continue sur $\mathbb{R}$.



4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\left(1-x^2\right)$.

   L'image de l'intervalle [0, 1] par f est [0, 1].

Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction définie $f(x) = (x-2)\sqrt{1-x}$.

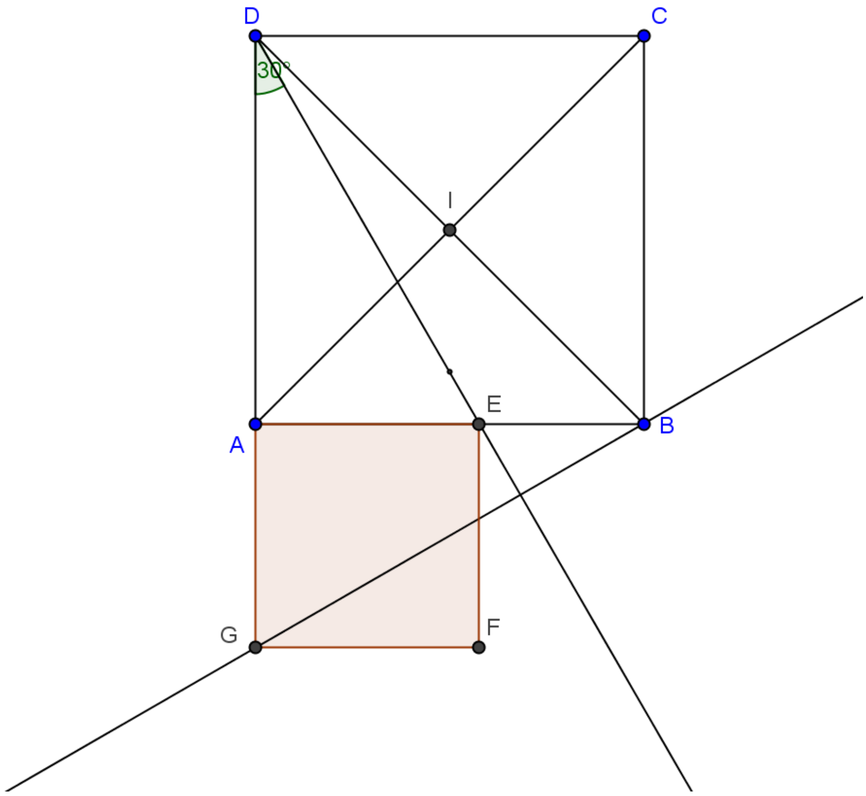
1. a) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition D.
   b) Montrer que f est strictement croissante sur D.
   c) Vérifier que $f(D) = \left]-\infty,0\right]$.

2. a) Montrer que l'équation f(x) = - 4 admet une unique solution α dans D.

   b) Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} près.

Exercice 3 : (10 points)

Soit ABCD un carré de centre I. On donne AB = $\sqrt{3}$ et soit E le point du segment [AB] tel que $\widehat{ADE} = 30°$. On construit à l'extérieur du carré ABCD le carré AEFG.



1. Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$; en déduire DE et montrer que AE = 1.
2. a) Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$.
   b) Montrer que (DE) $\perp$ (BG).
   c) Montrer que DE = BG.

3. a) Soit (Γ_1) des points M du plan tels que : $MA^2 + MC^2 = 6$.

   Vérifier que B appartient à (Γ_1) ; déterminer et construire l'ensemble (Γ_1).

   b) La droite (BG) recoupe (Γ_1) en H. Montrer que les points D, E et H sont alignés et calculer GH.

4. Soit J le milieu du segment [BG].

   a) Montrer que $JH = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

   b) Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que $MG^2 - MB^2 = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Exercice 1 :

1. **Faux.**

En effet : si $\left(\vec{u},\vec{v}\right)\equiv\frac{19\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\vec{u},\vec{w}\right)\equiv-\frac{32\pi}{3}[2\pi]$, alors

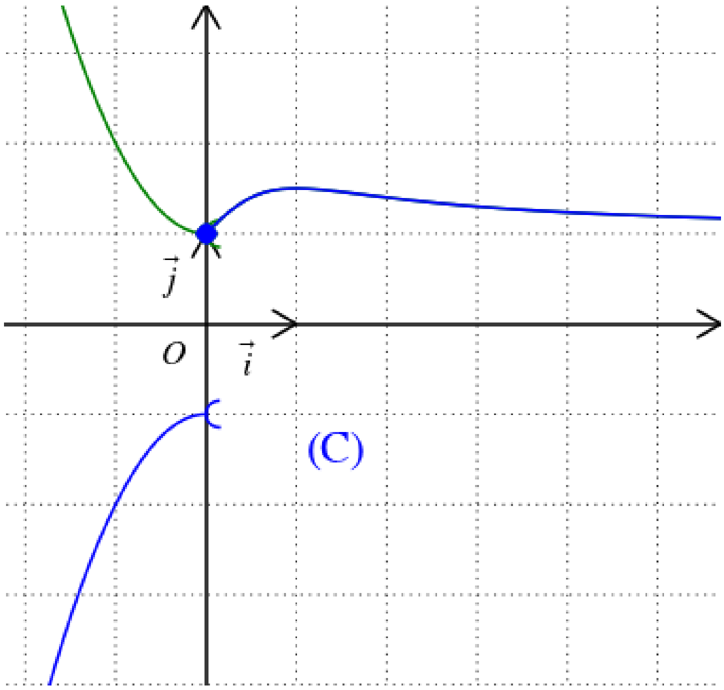
$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)-\left(\vec{u},\vec{w}\right)\equiv\frac{19\pi}{3}+\frac{32\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\left(\vec{w},\vec{v}\right)\equiv\frac{51\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\left(\vec{w},\vec{v}\right)\equiv17\pi[2\pi]\Leftrightarrow\left(\vec{w},\vec{v}\right)\equiv\pi[2\pi]$$

Donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de sens contraires.

2. **Vrai.**

En effet : Si M est un point de la droite (AI) alors I est le projeté orthogonal de M sur (BC). D'où $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}=BI.BC=a\frac{\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}=a^2$.

3. **Vrai.**



Sur l'intervalle $[0,+\infty[$, les courbes représentatives de f et |f| sont confondues.

Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, la courbe représentative de [f| est le symétrique de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses.

On peut tracer d'une manière continué la courbe représentative de |f| donc |f | est continue sur $\mathbb{R}$.

4. **Faux.**

En effet :

$$f(x)=1\Leftrightarrow x^4-x^2+1=0\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0\quad\text{(impossible)}$$

donc $1\notin f\left([0,1]\right)$.

Exercice 2 :

1. a) L'ensemble de définition de f est $D = \left]-\infty,1\right]$.

   La fonction $x \mapsto x-2$ est continue sur D.

   La fonction $x \mapsto 1-x$ est continue et positive sur D donc $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur D.

   Donc f est le produit de deux fonctions continues sur D donc f est continue sur D.

   b) Soit a et b deux réels de D tels que a < b ,

   On a : a – 2 < b – 2 < 0 donc -(a - 2) > -(b – 2)

   et -a > - b donc 1 – a > 1 – b donc $\sqrt{1-a} > \sqrt{1-b}$

   D'où $-(a-2)\sqrt{1-a} > -(b-2)\sqrt{1-b} \Leftrightarrow (a-2)\sqrt{1-a} < (b-2)\sqrt{1-b} \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

   Ainsi , f est strictement croissante sur D.

   c) f est continue et strictement croissante sur D donc $f\left(\left]-\infty,0\right]\right) = \left]-\infty, f(0)\right] = \left]-\infty,0\right]$.

2. a) f est continue et strictement croissante sur D et $-4 \in f(D) = \left]-\infty,0\right]$ donc l'équation f(x) = -4 admet une unique solution α dans D.

   b) On a f(-1) = $-3\sqrt{2} \approx -4,24$ et f(0) = -2.

   f(-1) < -4 < f(0) donc $-1 < \alpha < 0$.

   $f(-0,5) \approx -3,06$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,5$

   $f(-0,75) \approx -3,63$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,75$

   $f(-0,8) \approx -3,75$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,8$

   $f(-0,9) \approx -3,99$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,99$

Exercice 3:

1. A est le projeté orthogonal de E sur (AD) donc $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = DA^2 = 3$.

Or $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = DA.DE.\cos\left(\widehat{ADE}\right) = \sqrt{3}.DE.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}DE$, il en résulte : $\frac{3}{2}DE = 3$ d'où DE = 2.

Le triangle ADE est rectangle en A donc $AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = \sqrt{4-3} = 1$.

2. a) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DG}$ = DA.AG = DA.(DA + AG) = DA.(DA + AE) = $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right) = 3+\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = -AE.AB = -\sqrt{3}$.

b) $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG} = \left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right).\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG}\right) = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG}$

$= -\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG}$

$= -DA^2 + \left(3+\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} + 0$

$= -3 + 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3}$

$= 0$

Donc $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{BG}$ d'où (DE) $\perp$ (BG).

c) Les deux triangles ADE et ABG sont rectangles en A , AE = AG et AD = AB donc :

$DE = \sqrt{DA^2 + AE^2} = \sqrt{BA^2 + AG^2} = BG$.

3. a) $BA^2 + BC^2 = AC^2 = \left(\sqrt{2}.\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{6}^2 = 6$ donc B appartient à (Γ_1).

Pour tout point M du plan , $MA^2 + MC^2 = 6 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)^2 = 6 \Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 6 \Leftrightarrow MI^2 = 3 - IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = 3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow IM^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow IM = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi , (Γ_1) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou encore le cercle de centre I et passant par B . D'où (Γ_1) est le cercle circonscrit au carré ABCD.

b) [BD] est un diamètre du cercle (Γ_1) et comme H appartient à (Γ_1) alors

(DH) $\perp$ (BH) ou encore (DH) $\perp$ (BG) . Or (DE) $\perp$ (BG) , il en résulte : (DH) // (DE) d'où les points D, E et H sont alignés.

On a : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GD} = GA.GD$ et $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GH} = GB.GH$

D'où GA. GD = GB. GH . Ainsi : $GH = \frac{GA.GD}{GB} = \frac{1.\left(1+\sqrt{3}\right)}{DE} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4. a) JH = JB – HB = $\frac{1}{2}GB - \left(GB - GH\right) = GH - \frac{1}{2}GB = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b) Pour tout point M, $MG^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{BG}.\left(2\overrightarrow{MJ}\right) = 2\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{MJ}$

Soit K le projeté orthogonal de M sur (BG) , $MG^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{KJ}$.

D'où $M \in \left(\Gamma_2\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{KJ} = 2\left(\sqrt{3}-1\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{KJ} = \sqrt{3}-1$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{KJ} > 0$ donc $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires et de même sens et par suite BG.KJ = $\sqrt{3}-1$.

D'où $2KJ = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow KJ = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Or $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HJ}$ sont colinéaires et de même sens et $HJ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, donc $K = H$.

Par suite, (Γ_2) est la droite perpendiculaire à la droite (BG) en H d'où $\Gamma_2 = (DH)$.