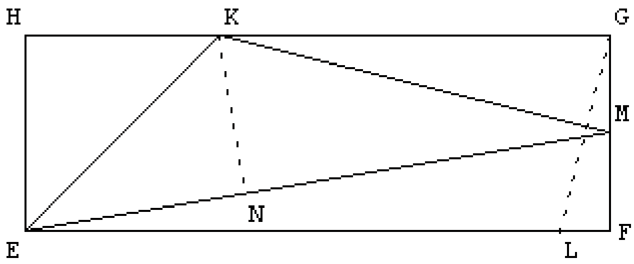
Exercice 1 (6 points)

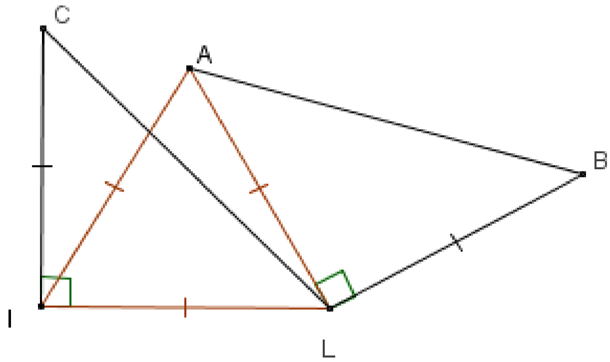
EFGH est un rectangle tel que EF = 6 et EH = 2
M est le milieu de [FG]
K ∈ [GH] et HK = 2
L ∈ [EF] et LF = 0,5
N est le projeté orthogonal de K sur (EM)
Les 2 questions sont indépendantes.



1.
   a. Calculer les longueurs EK et EM (valeurs exactes)
   b. En décomposant les 2 vecteurs, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM}$
   c. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{KEM}$
   d. En utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM}$, calculer EN. (valeurs exactes)
2. On se place dans le repère orthogonal $\left(E, \frac{1}{6}\overrightarrow{EF}, \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)$.
   a. Donner les coordonnées des points K, M, G et L
   b. Démontrer que (KM) et (GL) sont perpendiculaires.

Exercice 2: *(6 points)*

AIL est un triangle équilatéral dans le sens direct.
ABL et CIL sont 2 triangles rectangles et isocèles.



1. a. Trouver la mesure principale des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AL})$ et $(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AI})$
   b. Trouver la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AIC}$
   c. Trouver la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IAC}$ puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$
   d. Calculer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en utilisant la relation de Chasles. Que peut-on en déduire
2. Trouver la mesure principale des angles orientés suivants $(\overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LA})$; $(\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AL})$ et $(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{LB})$

Correction du devoir n° 6

Exercice 1 :

1.

a. A l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EHK :

$EK^2 = EH^2 + HK^2 = 4 + 4 = 8$ donc $EK = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

De même $EM^2 = EF^2 + FM^2 = 36 + 1 = 37$. $EM = \boxed{\sqrt{37}}$

b. $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK}) \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM}) = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{FM}$

$\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

$\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FM} = EH \times FM = 2 \times 1 = 2$

$\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{EF} = HK \times EF = 2 \times 6 = 12$

$\overrightarrow{HK} \perp \overrightarrow{FM}$ donc $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{FM} = 0$

On en déduit que $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 + 2 + 12 + 0 = \boxed{14}$

c. $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = EK \times EM \times \cos \widehat{KEM}$ donc $14 = \sqrt{8} \times \sqrt{37} \times \cos \widehat{KEM}$ ou $14 = \sqrt{296} \times \cos \widehat{KEM}$

$\cos \widehat{KEM} = \dfrac{14}{\sqrt{296}}$ donc $\boxed{\widehat{KEM} \approx 36°}$

d. $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{EM}$ (K se projette orthogonalement en N sur (EM))

$= EN \times EM$ ($\overrightarrow{EN}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont 2 vecteurs colinéaires de même sens)

Donc $14 = EN \times \sqrt{37}$, c'est à dire $\boxed{EN = \dfrac{14}{\sqrt{37}}}$

2. a. K(2 ; 2) ; M(6 ; 1) ; G(6 ; 2) et L(5,5 ; 0)

b. $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GL}\begin{pmatrix} 5{,}5-6 \\ 0-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{GL}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{GL} = xx' + yy' = 4 \times (-0{,}5) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$

On en déduit que $\boxed{(KM) \perp (GL)}$

Exercice 2:

1. a. Le triangle ABL est rectangle et isocèle donc $\widehat{BAL} = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad.

On en déduit que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AL}\right) = -\frac{\pi}{4}$ rad.

Le triangle AIL est équilatéral donc $\widehat{IAL} = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad.

On en déduit que $\left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AI}\right) = -\frac{\pi}{3}$ rad.

b. $\widehat{AIC} = \widehat{LIC} - \widehat{LIA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ rad.

c. Le triangle IAC est isocèle donc $\widehat{IAC} = \widehat{ICA} = \frac{\pi - \widehat{AIC}}{2} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$

On en déduit que $\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5\pi}{12}$

d. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AL}\right) + \left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AI}\right) + \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}$
$= -\frac{12\pi}{12} = -\pi$.

La mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est π rad.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire.
On en déduit que les points A, B et C sont alignés.

2. $\left(\overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LA}\right) = \left(\overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LI}\right) + \left(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LA}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$ rad.

$\left(\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AL}\right) = \left(-\overrightarrow{LB}, -\overrightarrow{LA}\right) = \left(\overrightarrow{LB}, \overrightarrow{LA}\right) = \frac{\pi}{2}$ rad.

$\left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{LB}\right) = \left(-\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LB}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LB}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LA}\right) + \left(\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LB}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$
$= \frac{6\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ rad