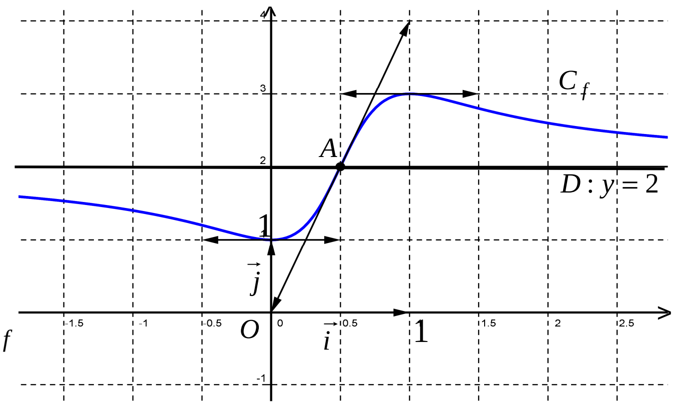
Devoir de contrôle # 2

Durée : 2 heures **Date :** 07/02/2012

Exercice 1 : (4 points)

Ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur IR.



On sait que :

− La droite D d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

− La courbe C_f admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

− $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie .

La justification de chaque réponse est demandée .

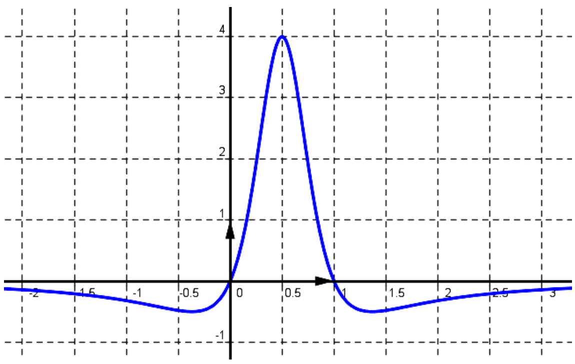
1) a) $f(-1) + f(2) = 2$ b) $f(-1) + f(2) = 1$ c) $f(-1) + f(2) = 4$

2) a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$ b) $f'(2) < 0$ c) $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$

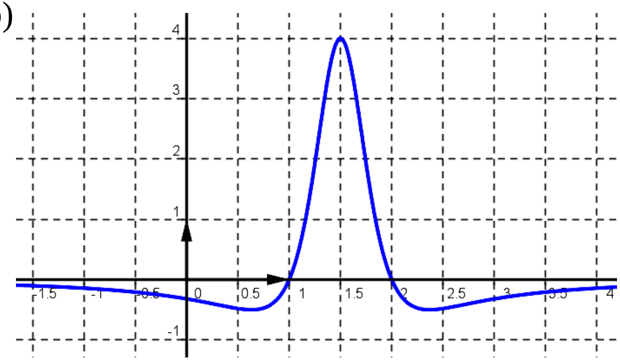
3) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 2 = 0$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 2 = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

4) La courbe représentative de la fonction f' est :

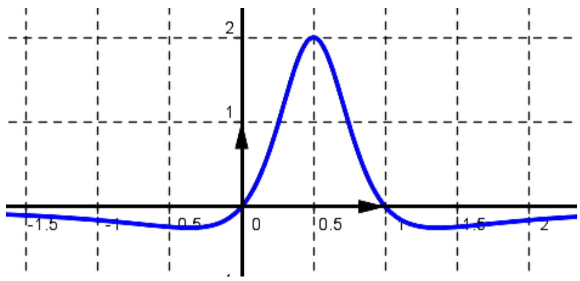
a)



b)



c)



5) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est dérivable en $\frac{1}{2}$ et :

a) $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$ b) $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$ c) $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2 : (4 points)

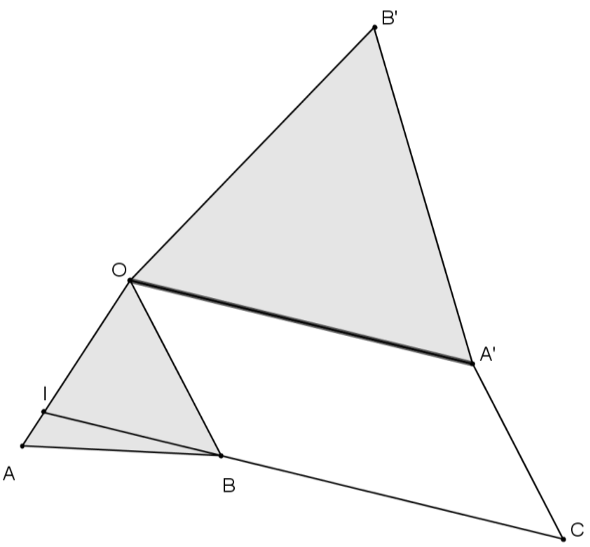
Soit n un entier naturel. On pose A = n^4+n^2+1 .

1. En remarquant que $A=n^4+2n^2+1-n^2$, montrer que A peut s'écrire comme produit de deux facteurs du second degré.
2. On pose $a=n^2+n+1$ et $b=n^2-n+1$.
   a) Démontrer que a et b sont impairs.
   b) Soit d un diviseur commun à a et à b. Démontrer que d divise 2n et $2\left(n^2+1\right)$.
   c) Montrer que n et n^2+1 sont premiers entre eux.
   d) En déduire que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 3: (5 points)

Soit OAB et OA'B' deux triangles équilatéraux directs. On désigne par C le point tel que OBCA' soit un parallélogramme. La droite (BC) coupe le segment [OA] en I (voir figure ci-contre). On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et on désigne par J l'image de I par r.

1. a) Montrer que : $\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BI}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)[2\pi]$.
   b) Montrer que les points J, O et B' sont alignés.



2. Soit C' = r(C).

a) Montrer que OC' = OB'.

b) Montrer que C' appartient à la droite (OB').

c) Montrer que r(C) = B'. et en déduire la nature du triangle ACB'.

Exercice 4 : (6 points)

On donne ci-dessous un tableau incomplet de variations d'une fonction f donnée par :

$f(x) = \dfrac{4x^2+b}{2x+a}$ (a et b sont des nombres réels).

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$			0		$\Vert$				

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Vérifier que a = -1 et b = 0.

Dans ce qui suit on prend $f(x) = \dfrac{4x^2}{2x-1}$

3) a- Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b- Démontrer que la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe (C).

c- Vérifier que la droite (D) d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C).

4) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2},2\right)$ est un centre de symétrie de (C).

5) a- Montrer que $f'(x) = \dfrac{8x(x-1)}{(2x-1)^2}$ puis dresser le tableau de variations de f.

b- Tracer (D) , (d) et (C).

6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2$.

7) On considère les points $A\left(\frac{1}{2},1\right)$ et M(3,0). La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en un point N.

a) Vérifier qu'une équation de la droite (AM) est $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.

b) Déterminer l'ordonnée de N.

c) Vérifier que $OM.ON = \frac{1}{2}f(3)$

Exercice 1 :

1. **c.**

En effet :

$A\left(\frac{1}{2},2\right)$ est centre de symétrie de (C) équivaut à pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $1-x \neq \frac{1}{2}$ et $f(1-x)+f(x)=4$

Prenons x = 2.

2. **b**

En effet :

f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc pour tout x > 1, $f'(x)<0$.

Prenons x = 2.

3. **a**

La droite (D) d'équation y = 2 est asymptote à (C_f) donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)-2=0$.

4. **c**

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f'(x) = 0 $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2$

f est strictement croisante sur $]0,1[$ donc f'(x) > 0 , pour tout x de $]0,1[$.

f est strictement décroisante sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ donc f'(x) < 0 , pour tout x de $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

5. **c**

F est dérivable est stristement positive sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel ,

$g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Doù g est dérivable en $\frac{1}{2}$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 :

1. Remarquons que $A=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2=\left(n^2-n+1\right)\left(n^2+n+1\right)$.

2. a) Nous avons a= n(n + 1) + 1 et b = n(n - 1) + 1. Or le produit de deux entiers consécutifs est pair donc a et b sont impairs.

   b) Soit d un diviseur commun à a et à b.

   Si d divise a et b , alors d divise a + b= $2\left(n^2+1\right)$ et a – b = 2n.

   c) Pour tout entier naturel n, $n^2+1=n\times n+1$ donc n^2+1 et n sont premiers entre eux.

d) $a \wedge b$ divise $(a+b)\wedge(a-b)$.

Comme $(a+b)\wedge(a-b)=\left[2\left(n^2+1\right)\right]\wedge(2n)=2\left[\left(n^2+1\right)\wedge n\right]=2$

Alors $a \wedge b$ divise 2.

Or a et b sont impairs donc $a \wedge b$ = 1 et par suite a et b sont premiers entre eux.

Exercice 3 :

1. a) On a : r(B) = O , r(I) = J et r(A) = A donc $\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$.

   Les droites (BI) et (OA') sont parallèles et (OB) est une sécante. Les angles $\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BI}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)$ sont correspondants et directs . Donc $\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BI}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)[2\pi]$.

   b) $$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB'}\right)&\equiv\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)+\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)[2\pi]\\&\equiv\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BI}\right)+\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)[2\pi]\\&\equiv\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)[2\pi]\\&\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}[2\pi]\\&\equiv\pi[2\pi]\end{aligned}$$

   Donc les points J , O et B' sont alignés.

2. a) On a : r(B) = 0 et r(C) = C' donc BC = OC' or BC = OA' = OB' .

   Il en résulte : OC' = OB'.

   b) C appartient à la droite (BI) donc r(C) = C' appartient à la droite r((BI)) = (OJ) = (OB').

   c) On a : r(B) = O et r(C) = C' donc $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OC'}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OC'}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

   Or $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{OC'}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et de même sens.

   De plus OC'= OB' , on conclue que : C' = B'.

   Ainsi , r(C) = B'.

   Comme r(C) = B' alors le triangle ACB' est équilatéral.

Exercice 4 :

1. L'ensemble de définition de f est $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

2. f n'est pas définie en $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}$ est une solution de l'équation $2x+a=0 \Leftrightarrow a=-1$.

$f(0)=0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=0 \Leftrightarrow b=0$.

3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-1}=0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x-1}=0$.

Donc la droite (d) d'équation $y=2x+1$ est asymptote à (C).

c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=-\infty$ donc le droite (D) d'équation $x=\frac{1}{2}$ est asymptote à (C).

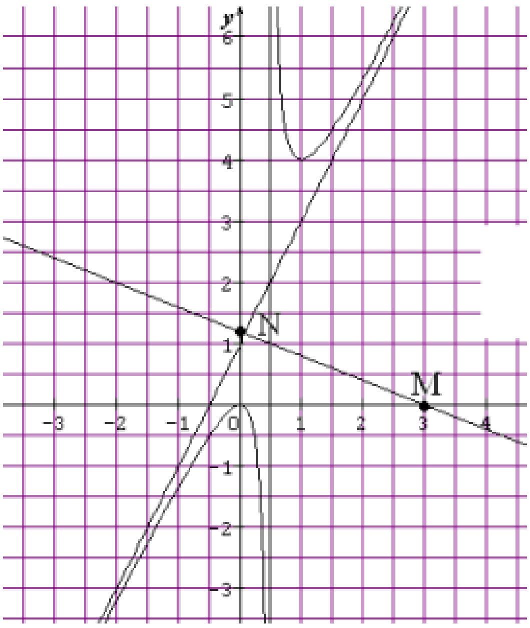
4. $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x\neq-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-x\neq\frac{1}{2}$

$$f(1-x)+f(x)=\frac{4(1-x)^2}{2(1-x)-1}+\frac{4x^2}{2x-1}=\frac{4-8x+4x^2}{1-2x}+\frac{4x^2}{2x-1}=\frac{-4+8x-4x^2}{2x-1}+\frac{4x^2}{2x-1}$$

$\frac{8x-4}{2x-1}=\frac{4(2x-1)}{2x-1}=4$ donc le point $I\left(\frac{1}{2},2\right)$ est un centre de symétrie de (C).

5. a) Pour tout $x\neq\frac{1}{2}$, $f'(x)=\frac{8x(2x-1)-2.4x^2}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-8x}{(2x-1)^2}=\frac{4x(x-2)}{(2x-1)^2}$.

b)



6. f(x) > 2 équivaut à (C) est située au dessus de la droite d'équation y = 2.

Par suite , l'ensemble de solutions de l'inéquation f(x) > 2 est $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

7. a) Les coordonnées de A sont $\left(\frac{1}{2},1\right)$ et $-\frac{2}{5}.\frac{1}{2}+\frac{6}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}=1$

Les coordonnées de M sont $(3,0)$ et $-\frac{2}{5}.3+\frac{6}{5}=-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}=0$

Donc les coordonnées de A et celles de B vérifient l'équation $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$,

donc (AM) : $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$.

b) La droite (AM) coupe la droite des ordonnées en N d'abscisse 0 et d'ordonnée $\frac{6}{5}$.

D'où $N\left(0,\frac{6}{5}\right)$.

c) OM= 3, ON = $\frac{6}{5}$ et $f(3)=\frac{36}{5}$ donc $OM.ON=\frac{1}{2}f(3)$.