LYCEE IBN KHALDOUN – RADES Mr ABIDI Farid	DEVOIR DE CONTROLE N°2 MATHEMATIQUES	3 M *** DUREE : 2h Lundi 11 /02 / 2013

Exercice 1: (4 points)

Répondre, avec justification, par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions suivantes :

1. La partie imaginaire de $-3+4i^6$ est 4.
2. Pour tout nombre complexe z, $z^2+3=\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)$.
3. Le conjugué du nombre complexe $\dfrac{3-2i\sqrt{2}}{4i-1}$ est $\dfrac{4i-1}{3-2i\sqrt{2}}$.

Exercice 2: (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On désigne par A le point d'affixe $z_A=4$.

Soit B le point de même abscisse que A et d'ordonnée $\dfrac{5}{2}$ et C le point de coordonnés $\left(2,-\dfrac{3}{2}\right)$. Voir figure à l'annexe ci-joint à la page 3-3.

1. Donner l'écriture cartésienne de chacune des affixes respectives z_B et z_C des points B et C.
2. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|z-4-\dfrac{5}{2}i\right|=\left|z-2+\dfrac{3}{2}i\right|$.

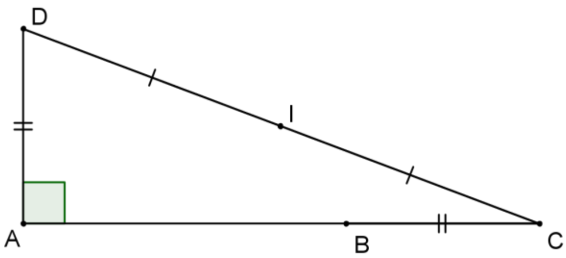
   Vérifier que le point A appartient à Γ puis déterminer et construire Γ.
3. Soit Γ' l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\bar{z}-4\right|=\dfrac{5}{2}$.

   a) B et C sont-ils des points de Γ' ?
   b) Déterminer et construire l'ensemble Γ'.

Exercice 3: (5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on donne ACD un triangle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [CD] et B le point du segment [AC] tel que BC= AD. Voir figure ci – dessous.



1. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et D en C. Donner son angle.
2. Sur l'annexe ci-joint à la page 3/3, construire le centre O de r.
3. a) Placer le point D' symétrique de D par rapport à O .

   b) Déterminer $r\left((DC)\right)$ et $r\left((OC)\right)$. En déduire r(C).

   c) En déduire que I'= r(I) est le milieu du segment [CD']. Placer le point I'.

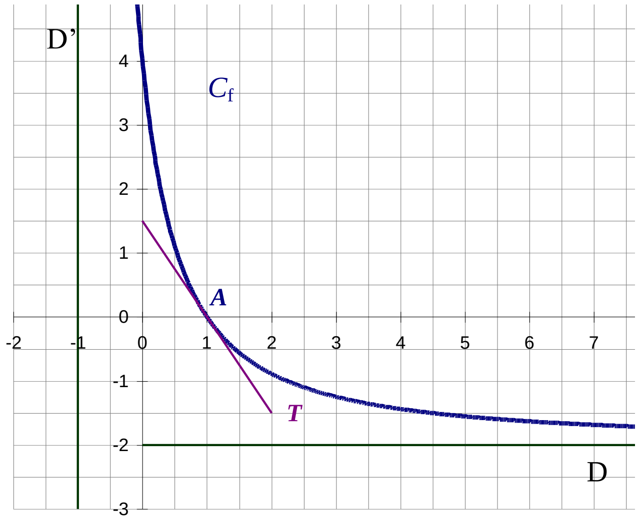
Exercice 4: (6 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. f est la fonction $x \mapsto x^3$.
   a) Montrer que l'approximation affine de $(2+h)^3$, pour h voisin de 0, est égale à $8+12h$.
   b) En déduire des approximations des nombres suivants : $(1{,}997)^3$ et $(2{,}001)^3$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(x^2+x\right)\sqrt{x}$.
   a) En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser $f_d'(0)$.
   b) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>0$.
   c) Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

3. Dans le plan est muni d'un repère orthonormé, la courbe C_f ci-dessous, représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. On sait que :
   – la droite T est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 ;
   – la droite D d'équation $y=-2$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
   – la droite D' d'équation $x=-1$ est asymptote à la courbe C_f.
   À partir du graphique et des renseignements fournis :
   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b. Déterminer $f'(1)$.
   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
   Pour tout réel $a \geq 1$, $f'(a)\times f(a) \geq 0$
   d. Dresser le tableau de variation de f.



Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève : ……………………………………………

Figure de l'exercice 2

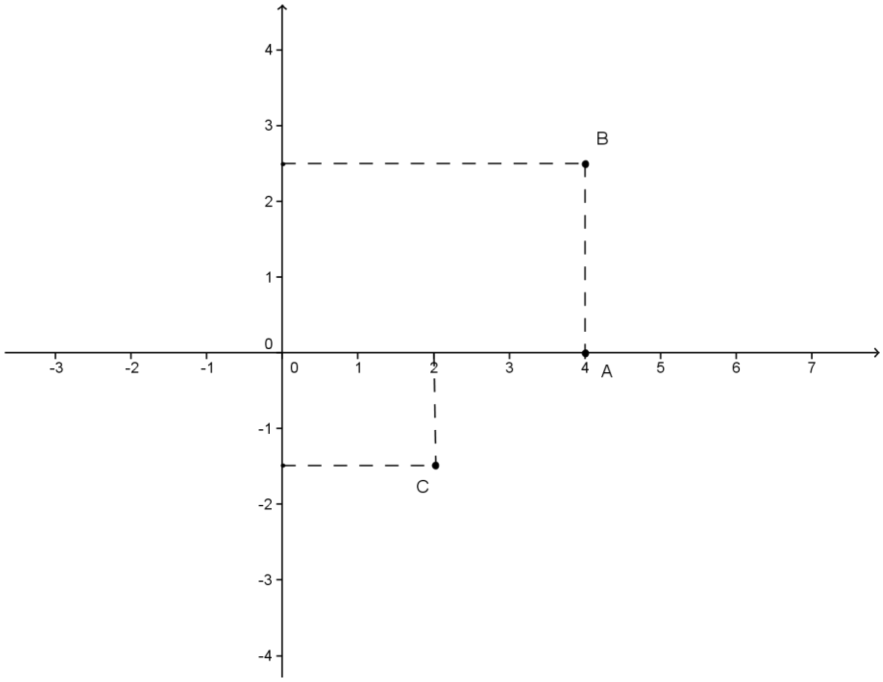
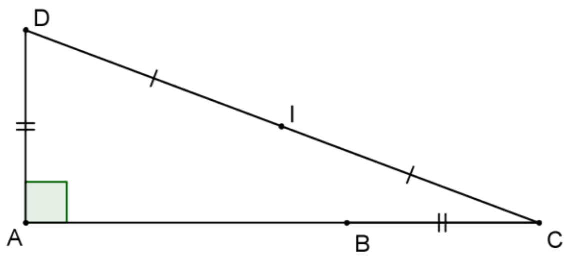


Figure de l'exercice 3



Corrigé

Exercice 1:

1. Faux

   En effet : $-3+4i^6=-3+4i^4\times i^2=-3-4=-7$ donc la partie imaginaire de $-3+4i^6$ est 0.

2. Vrai

   En effet : pour tout nombre complexe z, $\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)=z^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2=z^2+3$.

3. Vrai

   En effet :

$$\overline{\left(\frac{3-2i\sqrt{2}}{4i-1}\right)}=\frac{\overline{\left(3-2i\sqrt{2}\right)}}{\overline{\left(-1+4i\right)}}=\frac{3+2i\sqrt{2}}{-1-4i}=\frac{\left(3+2i\sqrt{2}\right)\left(3-2i\sqrt{2}\right)\left(-1+4i\right)}{\left(-1-4i\right)\left(-1+4i\right)\left(3-2i\sqrt{2}\right)}=\frac{17\left(-1+4i\right)}{17\left(3-2i\sqrt{2}\right)}=\frac{-1+4i}{3-2i\sqrt{2}}$$

Exercice 2:

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On désigne par A le point d'affixe $z_A=4$.

Soit B le point de même abscisse que A et d'ordonnée $\frac{5}{2}$ et C le point de coordonnés $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$. Voir figure à l'annexe ci-joint à la page 3-3.

1. Les coordonnées de B sont $\left(4,\frac{5}{2}\right)$ donc $z_B=4+\frac{5}{2}i$ et celle de C sont $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ donc $z_C=2-\frac{3}{2}i$.

2. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|z-4-\frac{5}{2}i\right|=\left|z-2+\frac{3}{2}i\right|$.

$\left|z_A-4-\frac{5}{2}i\right|=\left|4-4-\frac{5}{2}i\right|=\left|-\frac{5}{2}i\right|=\frac{5}{2}$ et $\left|z_A-2+\frac{3}{2}i\right|=\left|2-\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ donc le point A appartient à Γ.

$M(z)\in\Gamma\Leftrightarrow\left|z-4-\frac{5}{2}i\right|=\left|z-2+\frac{3}{2}i\right|\Leftrightarrow\left|z-z_B\right|=\left|z-z_C\right|\Leftrightarrow BM=CM$ donc Γ est la médiatrice du segment [BC].

3. Soit Γ' l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\bar{z}-4\right|=\frac{5}{2}$.

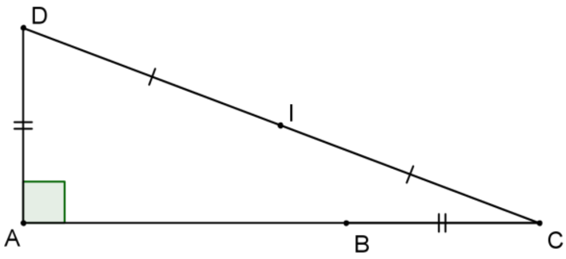
   a) $\left|\overline{z_B}-4\right|=\left|4-\frac{5}{2}i-4\right|=\left|-\frac{5}{2}i\right|=\frac{5}{2}$ donc $B\in\Gamma'$

   $\left|\overline{z_C}-4\right|=\left|2+\frac{3}{2}i-4\right|=\left|-2+\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}$ donc $C\in\Gamma'$

b) $M(z)\in\Gamma' \Leftrightarrow \left|\bar{z}-4\right|=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left|\overline{z-4}\right|=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left|z-4\right|=\frac{5}{2} \Leftrightarrow AM=\frac{5}{2}$ donc Γ' est le cercle de centre A et de rayon $\frac{5}{2}$.

Exercice 3:

Dans le plan orienté dans le sens direct, on donne ACD un triangle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On désigne par I le milieu de [CD] et B le point du segment [AC] tel que BC= AD. Voir figure ci – dessous.



1. On a AD = BC et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc il existe une unique rotation r qui transforme A en B et D en C d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
2. O le centre de r est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [DC].
3. a) Le point D' est le symétrique de D par rapport à O (voir figure).

   b) r est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc $r\left((DC)\right)$ est la droite perpendiculaire à (DC) passant par r(D) = C donc $r\left((DC)\right)=(CD')$ et $r\left((OC)\right)$ est la droite perpendiculaire à (OC) passant par r(O) = O donc $r\left((OC)\right)=(OD')$.

   $\{C\}=(DC)\cap(OC)$ donc $\{r(C)\}=r\left((DC)\right)\cap r\left((OC)\right)=(CD')\cap(OD')=\{D'\}$.

   En déduire r(C) = D'.

   c) I milieu de [DC] donc I'= r(I) est le milieu du segment r([DC]) = [CD'].

Exercice 4:

1. f est la fonction $x\mapsto x^3$.

   a) L'approximation affine de $(2+h)^3$, pour h voisin de 0, est : $(2+h)^3=f(2+h)\approx f(2)+f'(2)\times h$.

Or f(2) = 8 et $f'(2)=3\times2^2=12$ donc $(2+h)^3\approx8+12h$.

   b) $(1{,}997)^3=(2-0{,}003)^3\approx8+12\times(-0{,}003)$ donc $(1{,}997)^3\approx7{,}964$ et $(2{,}001)^3$.

   $(2{,}001)^3=(2+0{,}001)^3\approx8+12\times0{,}001$ donc $(2{,}001)^3\approx8{,}012$.

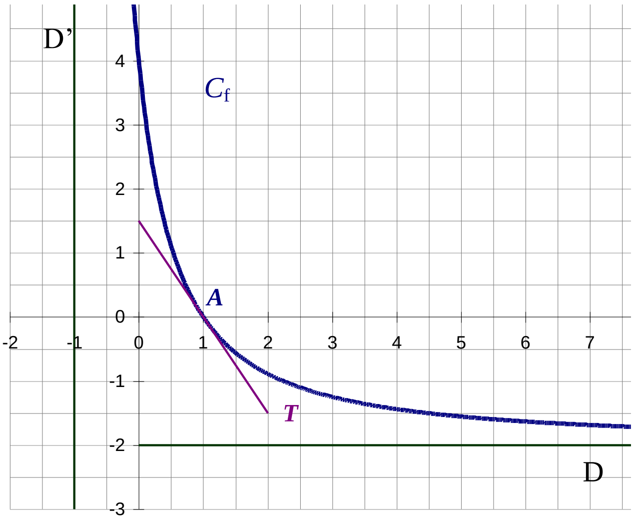
2. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\left(x^2+x\right)\sqrt{x}$.

   a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(x^2+x\right)\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)\sqrt{x}=0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$.

   b) $x\mapsto x^2+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x > 0 , $f'(x)=(2x+1)\sqrt{x}+\left(x^2+x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2x(2x+1)+\left(x^2+x\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2+3x}{2\sqrt{x}}$.

c) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et dérivable à droite en 0 donc f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

3. Dans le plan est muni d'un repère orthonormé, la courbe C_f ci-dessous, représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. On sait que :



– la droite T est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 ;
– la droite D d'équation $y=-2$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage $+\infty$.
– la droite D' d'équation $x=-1$ est asymptote à la courbe C_f.

À partir du graphique et des renseignements fournis :

a. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.

b. $f'(1)=\dfrac{0-\frac{3}{2}}{1-0}=-\dfrac{3}{2}$.

Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, C_f est située en dessous de l'axe des abscisses donc pour tout $a\geq 1$, $f(a)\leq 0$.

D'autre part , f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc pour tout $a\geq 1$, $f'(a)\leq 0$.

Ainsi, pour tout réel $a\geq 1$, $f'(a)\times f(a)\geq 0$

c- Le tableau de variation de f :

x	-1	$+\infty$
f'(x)	‖	-
f(x)	‖	$+\infty \searrow -2$

Figure de l’exercice 2 :

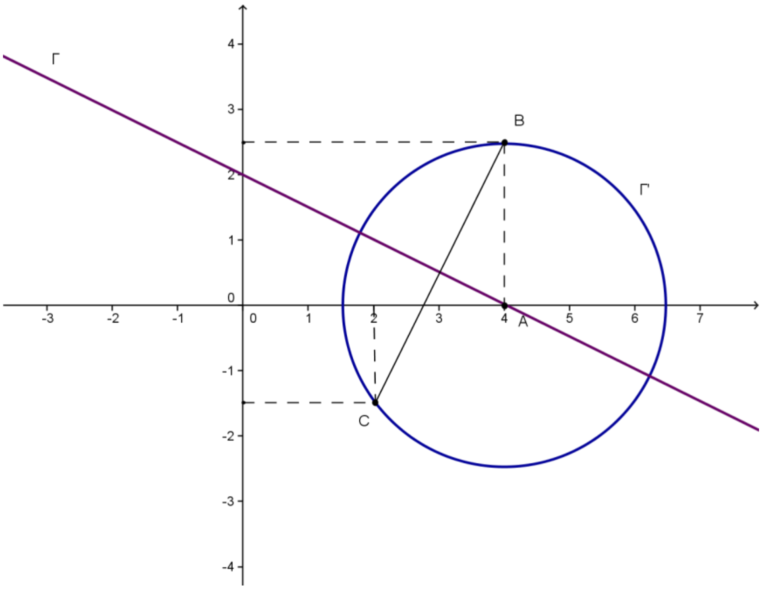


Figure de l’exercice 4 :