Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x-1}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

Ecrire le numéro de la question et donner, sans justification, la réponse qui lui correspond.

1. La fonction est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout x de $]1,+\infty[$, on a :

   a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; b) $f'(x)=1-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$; c) $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.
2. $(\mathscr{C})$ admet à droite au point d'abscisse 1 :
   a) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas
   b) une demi -tangente verticale dirigée vers le haut
   c) une demi -tangente oblique.
3. La fonction admet un extremum local en :

   a) $x_0=\dfrac{4}{5}$; b) $x_0=\dfrac{5}{4}$; c) $x_0=2$
4. La fonction f est strictement croissante sur :

   a) $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$; $[1,+\infty[$; c) $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$.

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $g'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
2. a) Soit a un réel différent de 1, écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a.
   b) Déterminer le point A de $(\mathscr{C})$ où la tangente passe par le point B((1, -2).
   c) Montrer qu'il existe deux points de $(\mathscr{C})$ où les tangentes sont parallèles à la droite $\Delta: 3x+y-2=0$.
3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x)=g(x), & \text{si } x\geq 2 \\ h(x)=-x^2+2x+3, & \text{si } x<2 \end{cases}$.

   a) Montrer que h est continue en 2.

b) Montrer que h n'est pas dérivable en 2. Construire les demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

4. Dresser la tableau de variation de h.

Exercice 3 :

1. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right]$ l'équation $1+\cos 2x=0$.

2. a) Montrer que , pour tout x de $\left]-\pi,\pi\right]$, $2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin 2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

   b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$.

3. Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin 2x}{1+\cos 2x}>0$.

Corrigé

Exercice 1 :

1. c) ; 2. a) ; 3. b) ; 4. c)

Exercice 2 :

1. g est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $g'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-1.(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

2. a) Une équation de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) de g au point d'abscisse a est :

$y=g'(a)(x-a)+g(a)=g'(a)x+g(a)-a.g'(a)$

Comme $g'(a)=\dfrac{a(a-2)}{(a-1)^2}$

et $g(a)-a.g'(a)=\dfrac{a^2-a+1}{a-1}-\dfrac{a^2(a-2)}{(a-1)^2}$

$=\dfrac{(a-1)(a^2-a+1)-a^3+2a^2}{(a-1)^2}$

$=\dfrac{2a-1}{(a-1)^2}$

alors $T:\ y=\dfrac{a(a-2)}{(a-1)^2}x+\dfrac{2a-1}{(a-1)^2}$.

b) (T) passe par le point B(1, -2) $\Leftrightarrow -2=\dfrac{a(a-2)}{(a-1)^2}.1+\dfrac{2a-1}{(a-1)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2-1}{(a-1)^2}=-2$

$\Leftrightarrow 3a^2-4a+1=0$ et $a\neq 1$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$

Ainsi la tangente(T) au point $A\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{7}{6}\right)$ passe par le point B(1,-2).

a) On sait qu'une équation de la droite (Δ) est $y=-3x+2$ donc La pente de la droite (Δ) est -3.

une tangente à (C) au point d'abscisse x est parallèle à (Δ) $\Leftrightarrow g'(x)=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = -3 \Leftrightarrow x(x-2) = -3(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x = -3x^2+6x-3 \Leftrightarrow 4x^2-8x+3=0$$

Le discriminant réduit de l'équation $4x^2-8x+3=0$ est $\Delta' = 16-12 = 4$.

Donc cette équation admet deux racines distinctes : $x' = \frac{3}{2}$ et $x'' = \frac{1}{2}$.

Par suite , les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ sont parallèles à la droite $\Delta : 3x+y-2=0$.

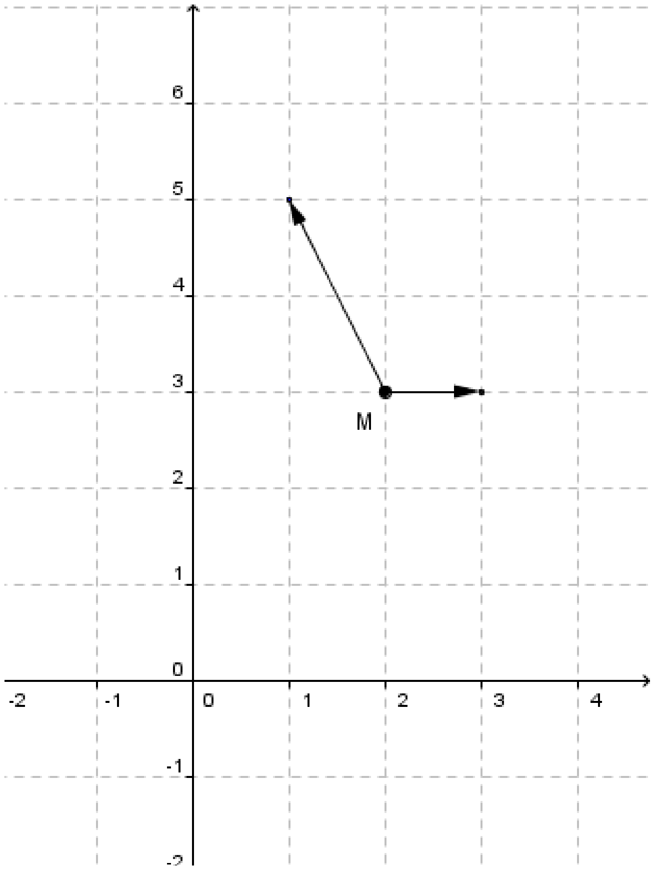
3. a) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 3 = g(2)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -x^2+2x+3 = 3 = g(2)$.

Par suite, h est continue en 2.

b) On sait que h est dérivable à droite en 2 et $h'_d(2) = g'(2) = 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x^2+2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} -x = -2$, il en résulte que h est dérivable à gauche en 2 et $h'_g(2) = -2$.

Comme $h'_d(2) \neq h'_g(2)$ alors h n'est pas dérivable en 2.



4. Pour tout x de $]2,+\infty[$, $h'(x)=g'(x)$ et pour tout x de $]-\infty,2[$, $h'(x)=-2x+2$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$.

Le tableau de variations de h :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	‖	+	
h(x)	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	$+\infty$

Exercice 3 :

1. Résolvons dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$ l'équation $1+\cos 2x=0$:

$$\begin{cases}-\pi<x\le\pi\\1+\cos 2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\pi<x\le\pi\\\cos 2x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\pi<x\le\pi\\2x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\pi<x\le\pi\\x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

D'où $x=-\dfrac{\pi}{2}$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, l'ensemble de solution de cette équation est $\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

3. a) Pour tout x de $]-\pi,\pi]$,

$$2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin 2x=2\sqrt{3}\frac{(1+\cos 2x)}{2}-\sin 2x=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+\sqrt{3}.$$

Or $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$ s'écrit sous la forme $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=r\cos(2x-\varphi)$

avec $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

et $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\sin\varphi=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\varphi\equiv-\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

Par suite, pour tout x de $]-\pi,\pi]$, $2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin 2x=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

b) Prenons $x=\dfrac{\pi}{12}$:

$$2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(2\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}=1+\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{12}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\frac{\pi}{12}>0$. Nous obtenons ainsi : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

3. Résolvons dans $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin 2x}{1+\cos 2x}<0 \Leftrightarrow \frac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}}{1+\cos 2x}<0$.

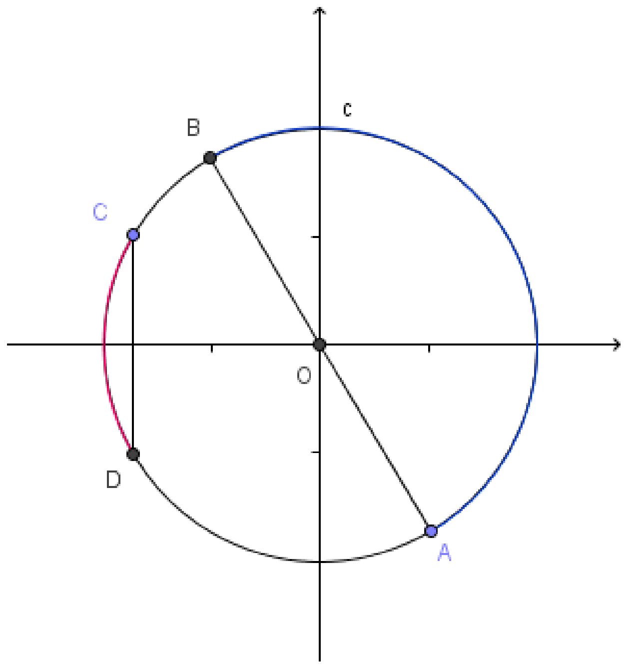
Comme pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, $1+\cos 2x>0$, alors

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin 2x}{1+\cos 2x}<0 \Leftrightarrow 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}<0 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Encadrons la variable $2x+\frac{\pi}{6}$:

$$-\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\leq 2x\leq\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{2\pi}{3}.$$



Cet encadrement lui correspond sur la figure ci-dessous l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ dans le sens positif

Pour que $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$,

il faudrait donc $\frac{5\pi}{6}\leq 2x+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$.

Cet encadrement lui correspond sur la figure ci-dessous l'arc orienté $\overset{\frown}{CD}$ dans
le sens positif.
Ces deux arcs n'ont aucun point commun
donc l'ensemble de solutions est vide.