Exercice 1: (3 points)

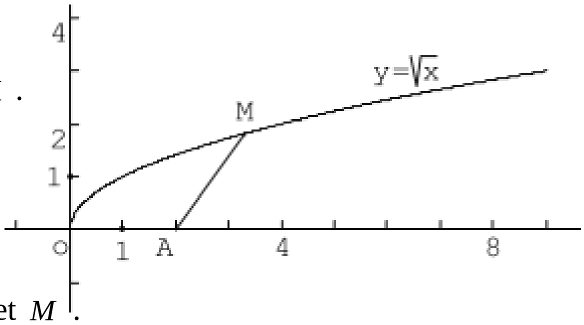
Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant la réponse :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2 - x} = -1$; 2 . $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{\sqrt{x}} = 1$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Exercice 2 : (4 points)

Ci-dessous, (C) est la courbe de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On pose A(2, 0) et M un point de (C) d'abscisse x ce qui revient à dire que le point M décrit la courbe (C) .



Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = AM$.

1. Vérifier que pour tout x de $[0;+\infty[$,
   $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer alors la distance minimale entre A et M .
4. Déterminer les coordonnées du point H de (C) le plus près de A.

Exercice 3: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(\pi x)$.

1. Etudier la parité de f et déterminer sa période.
2. a) Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

   b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ dans l'intervalle [0,1].

   c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur [0, 1] puis dresser le tableau de variation de f sur [0, 1].

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle [-1, 2].

Exercice 4 : (4 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1 .Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que le nombre n^2+n n'est pas premier ?

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, 8^n-1 est divisible par 7.

b) En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 7.

3. 2. a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que 383 et 127 sont premiers entre eux.

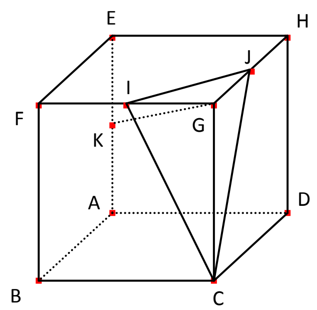
b) Résoudre dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, l'équation 383x=127y.

Exercice 5 : (4 points)

Soit le cube ABCDEFGH de côté 1.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [FG], [HG] et [AE].

Soit le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer les coordonnées des points K, G, I et J.
2. Calculer $\overrightarrow{KG}.\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{KG}.\overrightarrow{CJ}$. En déduire que la droite (GK) est perpendiculaire au plan (CIJ).
3. Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{7}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$.
   a) Montrer que L est le point d'intersection du plan (CIJ) et de la droite (GK).
   b) L est-il l'orthocentre du triangle CIJ ?

CORRIGE

Exercice 1:

1. Vrai

En effet : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{x-1}=-1$;

2. Faux

En effet : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{x}.\sqrt{x}=0$;

3. Faux

En effet : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{(3x)^2}.9=\lim\limits_{x\to 0}-9.\dfrac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}=-\dfrac{9}{2}$

Exercice 2 :

Ci-dessous, (C) est la courbe de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On pose A(2, 0) et M un point de (C) d'abscisse x ce qui revient à dire que le point M décrit la courbe (C) .

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=AM$.

1. Pour tout x de $[0;+\infty[$,

$$f(x)=AM=\sqrt{(x-2)^2+(f(x)-0)^2}=\sqrt{x^2-4x+4+x}=\sqrt{x^2-3x+4}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

La fonction $x\mapsto x^2-3x+4$ est dérivable et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout x positif , $f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$.

$f'(x)$ est du signe de 2x – 3 sur $[0;+\infty[$.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2	↘	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	↗	$+\infty$

3. f admet sur $[0\,;+\infty[$ un minimum $\frac{\sqrt{7}}{2}$ en $\frac{3}{2}$ d'où la distance minimale entre A et M est $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

4. Soit H le point de la courbe (C) le plus proche de A. L'abscisse de H est $\frac{3}{2}$ et son les ordonnée est $\sqrt{\frac{3}{2}}$ donc le point de (C) le plus près de A est $H\left(\frac{3}{2},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\cos(\pi x)$.

1. f est paire et périodique de période $\frac{2\pi}{\pi}=2$.
2. a) Pour tout x réel , $f'(x)=-2\pi\sin(\pi x)$.

   b) $\begin{cases}0\le x\le 1\\ f'(x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ -2\pi\sin(\pi x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le \pi x\le \pi\\ \sin(\pi x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le \pi x\le \pi\\ \pi x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

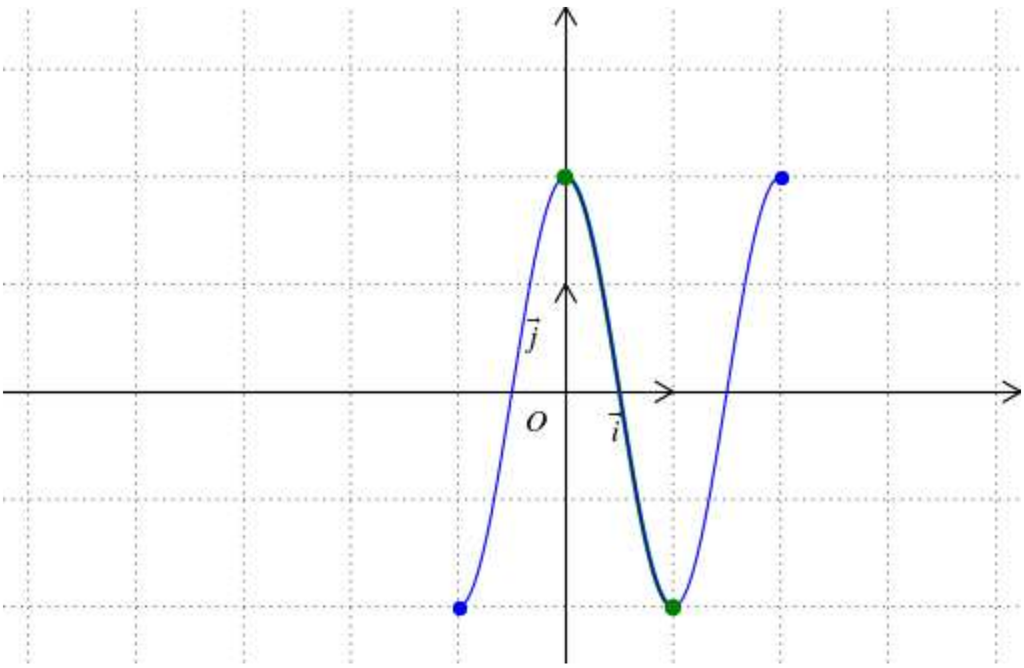
   c) Pour tout x de]0, 1[, $0<\pi x<\pi$ donc $\sin(\pi x)>0$ donc $f'(x)<0$.

x	0		1
$f'(x)$	0	-	0

D'où le tableau de variation de f sur [0, 1] est :

x	0		1
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	2	↘	-2

3. La représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle [-1, 2].



Exercice 4 :

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1 .Soit n un entier supérieur ou égal à 2, le nombre $n^2+n\geq 6$ et $n^2+n=n(n+1)$ est paire donc n^2+n n'est pas premier.

Remarque :

pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $n^2+n=n(n+1)$.

On a : $n\geq 2$ et n divise $n(n+1)$ donc n^2+n n'est pas premier.

2. a) On a : $8^0-1=0$ est divisible par 7.

On suppose que 8^n-1 est divisible par 7 , pour un certain entier naturel n, et on montre que $8^{n+1}-1$ est divisible par 7.

$8^{n+1}-1=8\times 8^n-1=8(8^n-1)+7$ est divisible par 7.

Ainsi, pour tout entier naturel n, 8^n-1 est divisible par 7.

b) On a : $2013=3\times 671$ donc $2^{2013}=2^{3\times 671}=8^{671}$. Or $8^{671}-1$ est divisible par 7, donc il existe un entier naturel q tel que $8^{671}-1=7q$ d'où $8^{671}=7q+1$.

Ainsi, le reste de 2^{2013} dans la division euclidienne par 7 est 1.

3. a) On a :

$383 = 127 \times 3 + 2$
$127 = 2 \times 63 + 1$

Donc $383 \wedge 127 = 1$ d'où 383 et 127 sont premiers entre eux.

b) On a : 383x=127y donc 383 divise 127 y . Or 383 et 127 sont premiers entre , donc 383 divise y d'où il existe un entier naturel q tel que y = 383q.

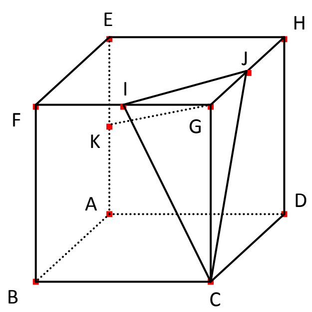
il en résulte : 383x = 127y = 127.383q d'où x = 127q .

La réciproque : si (x, y) = (127q, 383q) , avec q $\in \mathbb{N}$, alors $383x = 383(127q) = 127(383q) = 127y$.

Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation 383x=127y est $\{(127q, 383q)\ ,\ q \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 5 :

Soit le cube ABCDEFGH de côté 1. On note I, J et K les milieux respectifs des segments [FG], [HG] et [AE] et on considère le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. $K\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $G(1,1,1)$, $I\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

2. $\overrightarrow{KG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KG}.\overrightarrow{CI} = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ et $\overrightarrow{KG}.\overrightarrow{CJ} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$.

D'où le vecteur est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$. On en déduit que la droite (GK) est orthogonale à chacune des droites (CI) et (CJ) . Par suite , la droite (GK) perpendiculaire au plan (CIJ).

3. Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

a) $\overrightarrow{GL}\begin{pmatrix}\frac{7}{9}\\ \frac{7}{9}\\ \frac{7}{18}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{GL}=\frac{7}{9}\overrightarrow{KG}$ donc $L\in(KG)$. $\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9}\\ \frac{8}{9}\end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{KG}.\overrightarrow{CL}=-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=0$ donc $L\in(CIJ)$.

Ainsi, L est le point d'intersection du plan (CIJ) et de la droite (GK).

Remarque :

$$\text{dét}\left(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CL}\right)=\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{9}\\ 1 & 1 & \frac{8}{9}\end{vmatrix}=0+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{2}{9}\\ 1 & \frac{8}{9}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{2}{9}\\ 0 & -\frac{2}{9}\end{vmatrix}=0-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=0$$ donc les points

C, I, J et L sont coplanaires d'où $L\in(KG)$.

b) On a $\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9}\\ \frac{8}{9}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CL}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+0=0$ donc $\overrightarrow{CL}\perp\overrightarrow{IJ}$.

c) On a $\overrightarrow{LJ}\begin{pmatrix}-\frac{5}{18}\\ \frac{2}{9}\\ \frac{1}{9}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{LJ}.\overrightarrow{CI}=0-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=0$ donc $\overrightarrow{LJ}\perp\overrightarrow{CI}$

Par suite , L est l'orthocentre du triangle CIJ.