Exercice 1: (3 points)

On considère la fonction dont on donne le tableau de variations :

x	-5		-3		0		3		5
f(x)	3	↘	-1	↗	2	↘	-3	↗	- 2

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des trois propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On est sûr que :
   a) f(2) = 0 ; b) f(2) >0 ; c) $f(2) \in [-3, 2]$.
2. Le minimum de f est :
   a) 3 ; b) -3 ; c) -5.
3. L'équation f(x) = 0 admet dans l'intervalle [-5, 5] :
   a) Une seule solution ; b) Deux solutions exactement ; c) trois solutions exactement.
4. a) f est paire ; b) $f([-3,5]) = [-3, 2]$; c) $f(-4) \leq f(4)$.

Exercice 2: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La courbe C_f admet-elle une asymptote ?

2. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

3. Démontrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D.

4. Montrer que le point $A(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

Exercice 3 : (5 points)

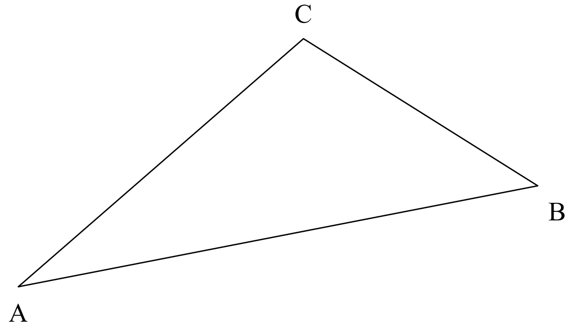
Une unité de longueur étant choisie. On considère segment [AB] de longueur 2. Soit C un point de la médiatrice (Δ) du segment [AB] tel que AC = 4.On note C' le milieu de [AB].

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ puis les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ exprimés en degré.
2. G étant le centre de gravité du triangle ABC.

   Calculer $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$. En déduire que $\widehat{AGB} = \widehat{BAC} = \widehat{ABC}$.

Exercice 4: (7 points)

L'unité de longueur est le centimètre. On considère un triangle ABC tel que : AB = 7 , AC = 5 et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$



1. a) Calculer la distance BC.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Déterminer la valeur exacte du sinus de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$, puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ exprimée en degrés et arrondie au dixième de degré près.

2. On appelle J le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;5)$.

a) Placer le point J sur la figure.

b) Déterminer l'ensemble **E** des points M du plan vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CA}=-10$

c) Déterminer l'ensemble **E'** des points M du plan vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{MC}\cdot\left(2.\overrightarrow{MA}+5.\overrightarrow{MB}\right)=0$

d) Déterminer l'ensemble **F** des points M du plan vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=-7$

e) Déterminer l'ensemble **F'** des points M du plan vérifiant l'égalité : $2.MA^2+5.MB^2=133$

Exercice 1 :

1. c) ; 2.b) ; 3. c) ; 4.b)

Exercice 2 :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+3\right)=4\\ \lim\limits_{x\to1^-}\left(x-1\right)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+3}{x-1}=-\infty \text{ et } \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+3\right)=4\\ \lim\limits_{x\to1^+}\left(x-1\right)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3}{x-1}=+\infty.$$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2+3}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+3}{x-1}=+\infty$.

La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation x = 1.

2. Remarquons que : $x^2+3=(x+1)(x-1)+4$. Il en résulte que : pour tout $x\neq1$,

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)+4}{x-1}=x+1+\frac{4}{x-1}.$$

3. $\left.\begin{array}{l}f(x)=x+1+\frac{4}{x-1}\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0\end{array}\right\}$ donc la courbe C_f de f admet pour asymptote oblique la droite

$D: y=x+1$.

4. $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\Leftrightarrow x\neq1\Leftrightarrow -x\neq-1\Leftrightarrow 2-x\neq1\Leftrightarrow 2-x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

et $f(2-x)+f(x)=2-x+1+\frac{4}{2-x-1}+x+1+\frac{4}{x-1}=4+\frac{4}{1-x}+\frac{4}{x-1}=2\times2$

Donc $A(1;2)$ est un centre de symétrie de C_f.

Exercice 3 :

1. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC'=2$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=-BA.BC'=-2$

et $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AB}.\left(2\overrightarrow{CC'}\right)=2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}\right)=0$.

ABC est un triangle isocèle de sommet principal C donc $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}$.

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\Leftrightarrow AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=2\Leftrightarrow 8\cos\left(\widehat{BAC}\right)=2\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{1}{4}$

D'où $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}\simeq75{,}5°$.

Il en résulte que $\widehat{ACB}=\pi-2\widehat{BAC}\simeq29°$.

2. $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\left(\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{C'A}\right).\left(\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{C'B}\right)=\left(\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{C'A}\right).\left(\overrightarrow{GC'}-\overrightarrow{C'A}\right)=GC'^2-C'A^2$

Or $GC'^2-C'A^2=\left(\frac{1}{3}CC'\right)^2-1=\frac{1}{9}\left(AC^2-AC'^2\right)-1=\frac{1}{9}.15-1=\frac{2}{3}$

donc $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}$.

D'autre part : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=GA\times GB\times\cos\left(\widehat{AGB}\right)=GA^2\cos\left(\widehat{AGB}\right)$.

Or $GA^2=GC'^2+AC'^2=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$

Il en résulte que $\frac{8}{3}\cos\left(\widehat{AGB}\right)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{AGB}\right)=\frac{1}{4}$.

Les angles géométriques $\widehat{AGB}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ont même cosinus donc $\widehat{AGB}=\widehat{BAC}=\widehat{ABC}$.

Exercice 4 :

1. a) En application de la formule d'Al-Kashi, on écrit :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=49+25-2\times7\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=74-35\sqrt{3}$$

Donc $BC=\sqrt{74-35\sqrt{3}}$.

b) L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{1}{2}\times7\times5\times\frac{1}{2}=\frac{35}{4}$.

c) D'après la formule des sinus, on a : $\frac{BC}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)}=\frac{AC}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}=\frac{AB}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}$.

D'où $\frac{BC}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)}=\frac{AC}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}\Leftrightarrow\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\sin\left(\widehat{BAC}\right)\times\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{5}{2\sqrt{74-35\sqrt{3}}}$

Il en résulte qu'une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ est 43,1°.

2. a) J est barycentre de (A, 2) et (B, 5) $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$.

b) $M\in E\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CA}=-10\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{CA}=-10\Leftrightarrow\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CA}=-10$

Or $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}=-CH.CA=-10$, par conséquent :

$$M\in E\Leftrightarrow10+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CA}=10\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{CA}.$$

L'ensemble E est donc la perpendiculaire à (AC) passant par H.

c) $M\in E'\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}\left(2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}.\left(7\overrightarrow{MJ}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MJ}=0$

Donc l'ensemble E' est le cercle de diamètre [CJ].

d) Remarquons d'abord que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=MI^2-IA^2=MI^2-\frac{25}{4}$$

Par suite :

$$M \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = -7 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = -7 \Leftrightarrow IM^2 = IA^2 - 7 \Leftrightarrow IM^2 = -\frac{3}{4}$$

Ainsi l'ensemble F est vide.

e) Pour tout point M du plan, on a :

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 5MB^2 &= 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}\right)^2 + 5\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right)^2 \\ &= 2\left(MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JA} + JA^2\right) + 5\left(MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JA} + JA^2\right) \\ &= 7MJ^2 + 2JA^2 + 5JB^2 + 2\overrightarrow{MJ}\left(2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB}\right) \\ &= 7MJ^2 + 50 + 20 \\ &= 7MJ^2 + 70 \end{aligned}$$

Il vient alors : $M \in F' \Leftrightarrow 2MA^2 + 5MB^2 = 133 \Leftrightarrow 7JM^2 + 70 = 133 \Leftrightarrow JM^2 = 9 \Leftrightarrow JM = 3$

Ainsi, l'ensemble F' est le cercle de centre J et de rayon 3.