

Exercice 1 : (3 points) : Cocher les bonnes réponses

1) Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{2\pi}{5}$ [2π], on a

a) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{2\pi}{5}$ [2π]

b) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{2\pi}{5}$ [2π]

c) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{3\pi}{5}$ [2π]

2) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{3024\pi}{4}$ [2π], la mesure principale de (\vec{u}, \vec{v}) est

a) π

b) 0

c) $\frac{\pi}{4}$

3) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{7\pi}{3}$ [2π], une autre mesure de (\vec{u}, \vec{v}) est :

a) $\frac{-23\pi}{3}$

b) $\frac{13\pi}{3}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

4) Soit A, B et C trois points distincts tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \alpha$ [2π], on a :

a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \equiv -\alpha$ [2π]

b) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi + \alpha$ [2π]

c) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \equiv \alpha$ [2π]

Exercice 2 : (4 points)

La courbe à côté est celle d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^*

Les droites D : y = x - 1 et D' : x = 0 sont asymptotes à C_f

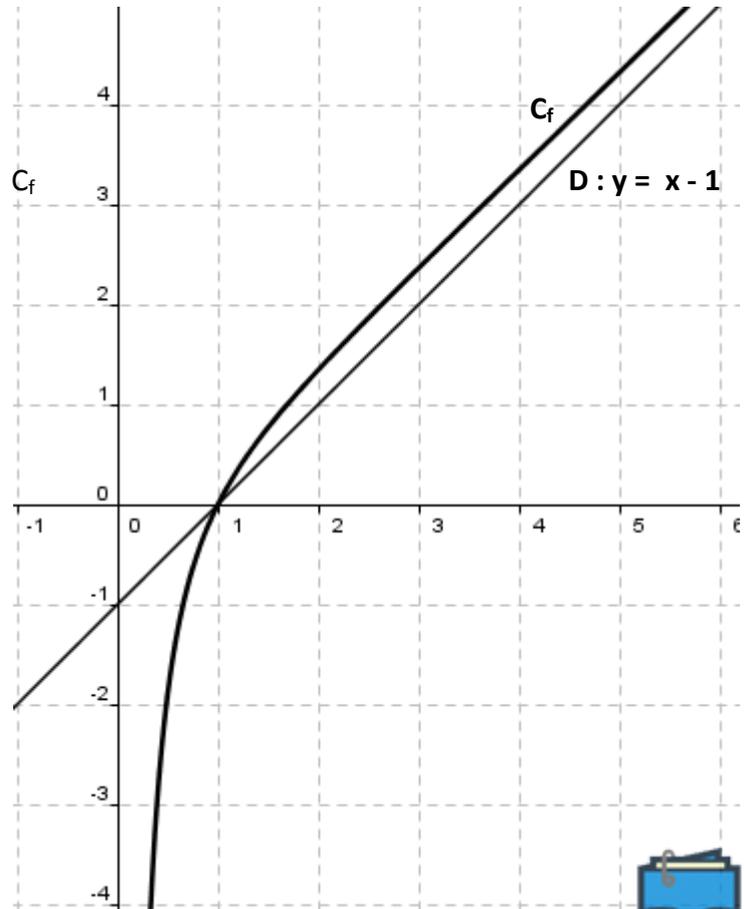
Soit g(x) = f(x) - (x - 1)

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$

3) Déterminer l' $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{f(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{f(x)}$



Exercice 3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1} & \text{si } x > -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1)a) Développer $(x + 1)(x^2 + 3)$

b) Montrer que f est continue en -1

2)a) montrer que pour tout $x \leq -1$, on a $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} - x} + 1$

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3)a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) montrer que pour tout $x > -1$ et $x \neq -1$, $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$

c) Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

d) Déterminer la position de C et D

Exercice 4 : (7 points)

Soit B et C deux points distincts du plan orienté et $E = \{M \text{ tel que } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \}$

1) Construire E

2) Soit $A \in E$ et tel que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{-3\pi}{8} [2\pi]$

a) Construire A

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle

3) Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre et soit A' le symétrique de A par rapport à O

Déterminer $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB})$

4) Soit $M \in \Gamma \setminus \{A, B, C\}$, Δ la perpendiculaire à (AM) passant par C et $\{I\} = \Delta \cap (BM)$

Montrer que $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}) [\pi]$ et déduire que $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{8} [\pi]$

5) Soit J un point du cercle de centre A et de rayon AB privé de B et C

Montrer que les points I, J, B et C appartiennent à un même cercle

Correction

Exercice 1 :

- 1)b) 2)b) 3)a et b 4)b et c

Exercice 2 : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + \frac{x-1}{x} = 1$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{f(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{f(x)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Exercice 3 :

1) a) $(x+1)(x^2+3) = x^3 + x^2 + 3x + 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2+3} + x + 1 = 2 = f(-1)$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = -2 \neq f(-1)$$

donc f n'est pas continue en -1

2) a) $f(x) = \sqrt{x^2+3} + x + 1 = \frac{(\sqrt{x^2+3} + x)(\sqrt{x^2+3} - x)}{\sqrt{x^2+3} - x} + 1 = \frac{3}{\sqrt{x^2+3} - x} + 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3} - x} + 1 = 1$

$\Rightarrow D: y = 1$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

3) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

b) $x > -1$, $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{x^2-1+4}{x-1} = x+1 + \frac{4}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = 0 \Rightarrow D': y = x+1$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

d) soit $g(x) = f(x) - (x+1)$

si $x < -1$, $g(x) = \sqrt{x^2+3} > 0 \Rightarrow C$ est au dessus de D

si $-1 < x < 1$, $g(x) = \frac{4}{x-1} < 0 \Rightarrow C$ est au dessous de D'

si $x > 1$, $g(x) = \frac{4}{x-1} > 0 \Rightarrow C$ est au dessus de D'

