Mathématiques	Devoir de synthèse n°1		
Lycée IBN KHALDOUN - RADES			
3 e Maths 1	Jeudi 08-12-2011	Durée : 2 heures	Prof : ABIDI Farid

Le sujet comporte 3 pages

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que AC= 3 et AB = 4 . On désigne par D le point du segment [BC] tel que BD = $\frac{2}{3}BC$. Alors $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est égal à :

a) 4 ; b) 6 ; c) 8

2) Si $A\left(-\sqrt{3};-1\right)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors B le milieu du segment [OA] a pour coordonnées polaires :

a) $\left(2;-\frac{5\pi}{6}\right)$ b) $\left(1;-\frac{5\pi}{6}\right)$; c) $\left(1;-\frac{2\pi}{3}\right)$

3) L'ensemble des solutions dans $[0;2\pi[$ de l'inéquation $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)>0$ est :

a) $\left]\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[$; b) $\left]\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right[$; c) $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{3},2\pi\right[$

Exercice 2 : (3 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1. Développer et réduire $(1+x)^{10}$.
2. Déterminer le nombre de « mots » de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot « DEVOIR ».
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3=387n$

Exercice 3 : (4 points)

On pose pour tout x réel , $A(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

1. Calculer $A\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $A\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Résoudre , dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$, l'équation $A(x)=0$.

3. a) Montrer que pour tout x réel , $A(x) = 3-4\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

b) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4 : (5 points)

Dans un plan apporté a un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(3 ;0) , B(3 ;1) et C(3 ;4).On désigne par D le projeté orthogonal de C sur (OB)

1) a) Calculer $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire alors BD

c) Calculer cos $(\widehat{OBC})$

2)a) Calculer $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ (On pourra remarquer que $\widehat{ABD}=\widehat{OBC}$)

b) Soit (x,y) les coordonnées de D , en calculant $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ en fonction de x et y, déduire les coordonnées de D dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 5 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+6}{x+1}, & \text{si } x<-1\\ \dfrac{x^2-2x}{x+1}, & \text{si } -1<x\leq 0\\ \sqrt{x^2+4x+9}-x-3, & \text{si } x>0\end{cases}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère (C) la représentation graphique d'une fonction f .

1. a) Déterminer la limite de f en - ∞.
   b) Montrer que la droite (D) d'équation y = x +3 est asymptote à (C) au voisinage de - ∞.

2. a) Montrer que , pour tout x > 0, $f(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}+1+\frac{3}{x}}$.

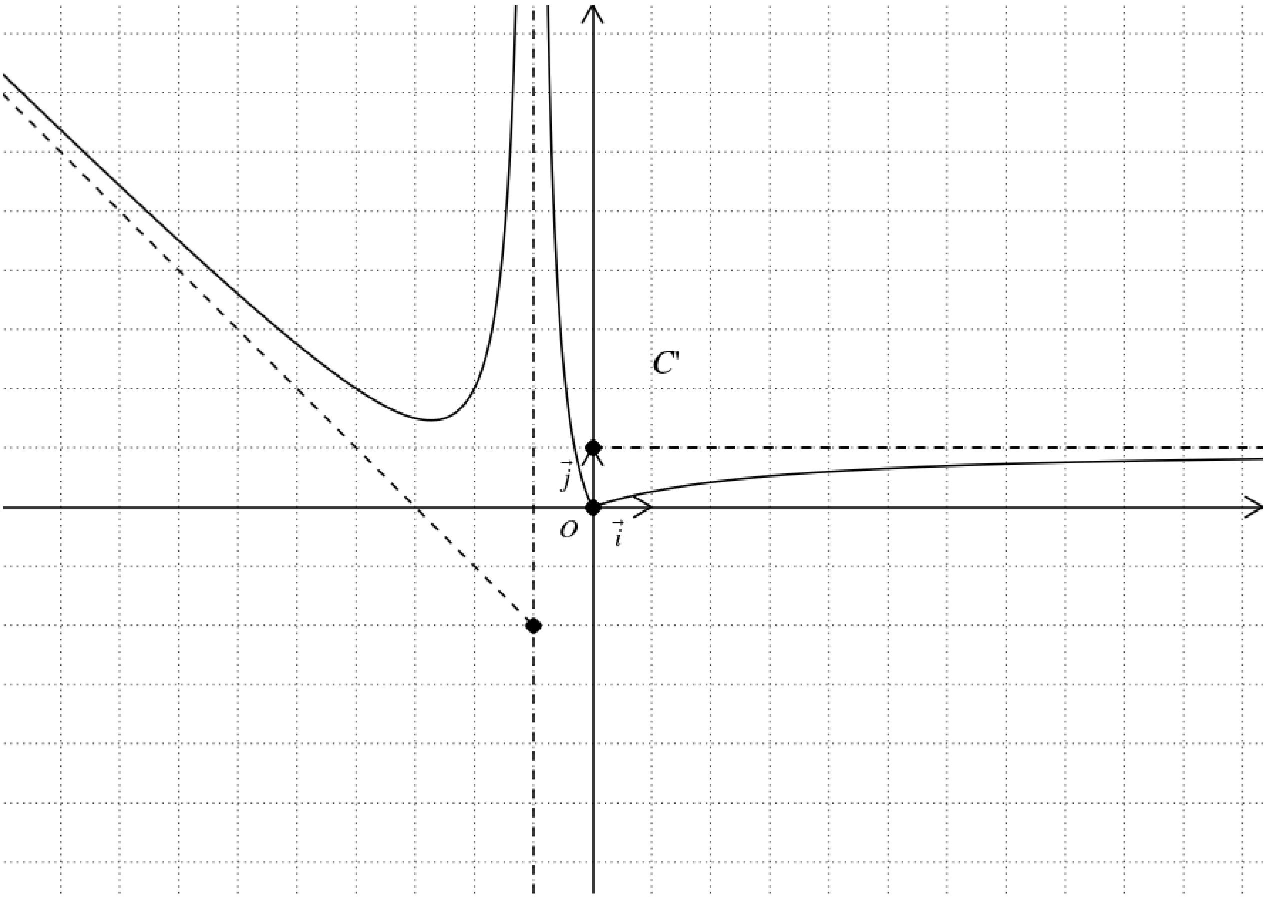
   b) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote (D') au voisinage de +∞.

   c) Montrer que la courbe (C) admet une autre asymptote dont on précisera une équation.

3. Montrer que f est continue en 0.

4. On donne (C') la courbe représentative d'une fonction g . Voir figure à la page 3-3 .

Expliciter g(x).



Corrigé

Exercice 1 :

1. **c** ; 2.**a** ; 3.**c**

Exercice 2 :

1. $$(1+x)^{10}=C_{10}^{0}+C_{10}^{1}x+C_{10}^{2}x^2+C_{10}^{3}x^3+C_{10}^{4}x^4+C_{10}^{5}x^5+C_{10}^{6}x^6+C_{10}^{7}x^7+C_{10}^{8}x^8+C_{10}^{9}x^9+C_{10}^{10}x^{10}$$
$$=1+10x+45x^2+120x^3+210x^4+252x^5+210x^6+120x^7+45x^8+10x^9+x^{10}$$
2. Le nombre de mots de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot DEVOIR est : $A_6^4=6\times5\times4\times3=360$.
3. Résolvons dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{3}=387n$

   Remarquons d'abord que l'on doit avoir $2n\geq 3$ donc $n\geq 2$.

   L'équation s'écrit : $2n+\frac{1}{2}2n(2n-1)+\frac{1}{6}2n(2n-1)(2n-2)=387n$

   D'où , en multipliant par 3 : $6n+3n(2n-1)+n(2n-1)(2n-2)=1161n$.

   On obtient une équation équivalente en divisant par :

   $6+3n(2n-1)+(2n-1)(2n-2)=1161 \Leftrightarrow 4n^2=1156 \Leftrightarrow n^2=289 \Leftrightarrow n=17$.

Exercice 3 :

On pose pour tout x réel , $A(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

1. Calculer $A\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1=1$

   et $A\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+1=2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1=2$.

3. $A(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x+\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est : $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

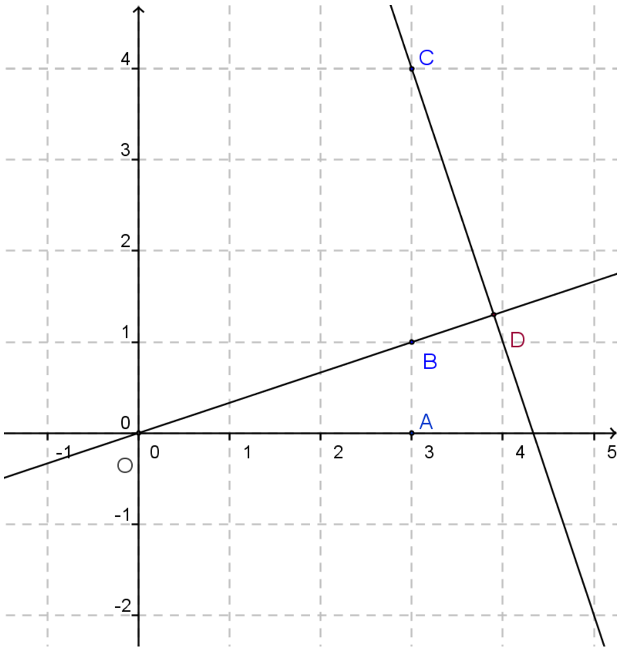
Et l'ensemble des solutions dans $\left]-\pi,\pi\right]$ est : $\left\{-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\}$.

3. a) Pour tout x réel , $A(x) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1 = 2\left[1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right]+1 = 3-4\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

b) $A(0)=3-4\sin^2\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{6}+1=3-4\sin^2\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Or $\frac{\pi}{12}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\frac{\pi}{12}>0$ d'où $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 4 :



1) a) On a : $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = -3$.

b) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}=-OB.BD$ d'où $-OB.BD=-3 \Leftrightarrow BD=\frac{3}{OB} \Leftrightarrow BD=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

c) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=BO.BD\cos\left(\widehat{OBC}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{OBC}\right)=\frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{BO.BC} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{OBC}\right)=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

2)a) On a $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD} = -3$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = BA.BD.\cos\left(\widehat{ABD}\right)=1.\frac{3}{\sqrt{10}}.\cos\left(\widehat{OBC}\right)=-\frac{3}{10}$.

b) Soit (x, y) les coordonnées de D , $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD} = -3x - y + 10$

et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = -y+1$.

Par suite : $\begin{cases}-3x-y+10=-3\\-y+1=-\dfrac{3}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{39}{10}\\y=\dfrac{13}{10}\end{cases}$.

Donc les coordonnées de D dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont (3,9 ; 1,3) .

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+6}{x+1}, & \text{si } x<-1\\ \dfrac{x^2-2x}{x+1}, & \text{si } -1<x\le 0\\ \sqrt{x^2+4x+9}-x-3, & \text{si } x>0\end{cases}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère (C) la représentation graphique d'une fonction f .

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+6}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+6-(x+1)(x+3)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x+1}=0$ donc la droite (D) d'équation y = x +3 est asymptote à (C) au voisinage de - ∞.

2. a) Pour tout x > 0, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+9}-x-3=\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+4x+9}+x+3}=\dfrac{-2}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}+1+\frac{3}{x}}$.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}+1+\frac{3}{x}}=-1$ donc la droite (D') d'équation y = -1 est une asymptote à (C) au voisinage de +∞.

   c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+6}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-2x}{x+1}=+\infty$ donc la droite d'équation x = -1 est asymptote à la courbe (C).

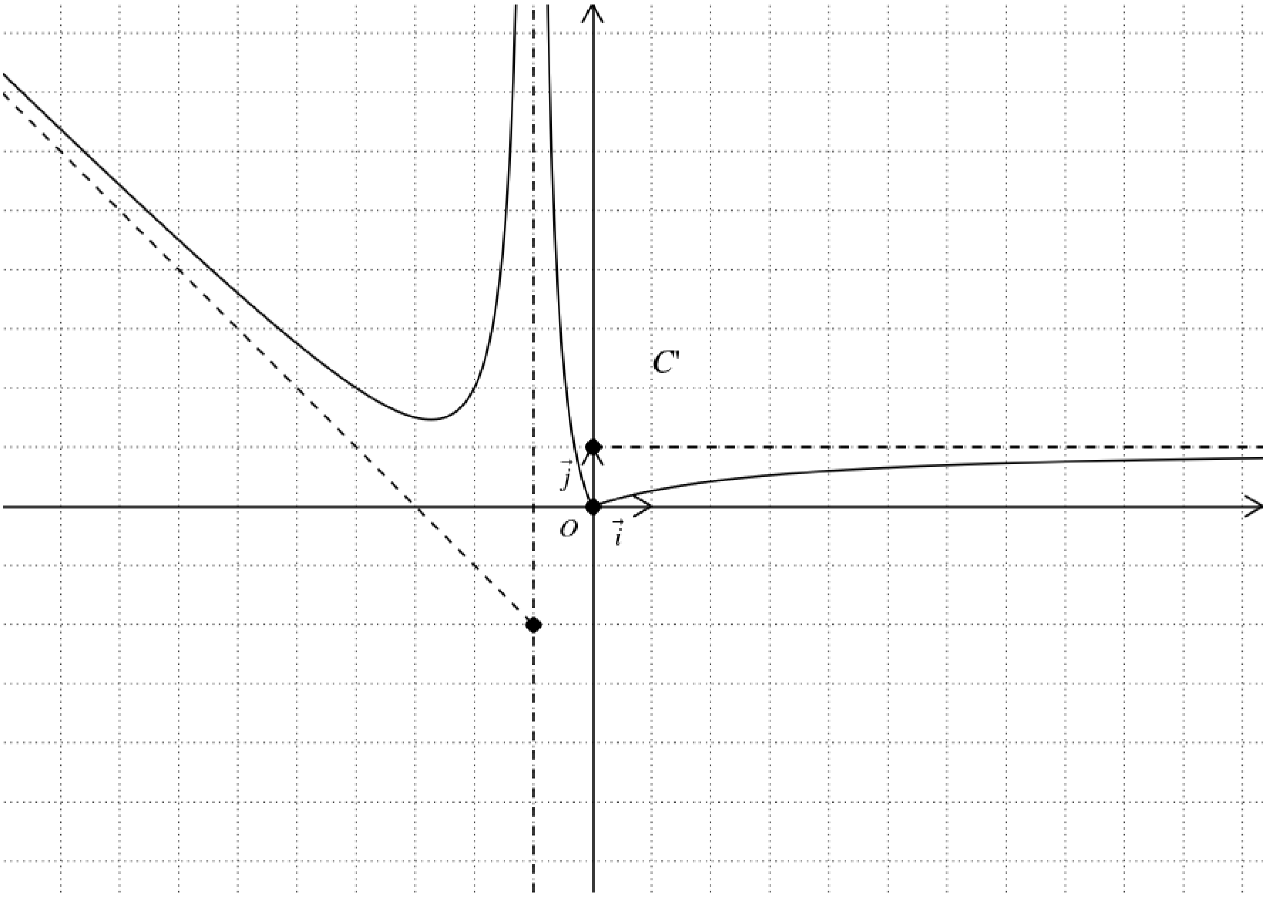
2. f(0) = 0 .

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2-2x}{x+1} = 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x^2+4x+9} - x - 3 = 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0.

3. On donne (C') la courbe représentative d'une fonction g . Voir figure à la page 3-3 .

g(x) = |f(x)|.



La courbe représentative de f est :