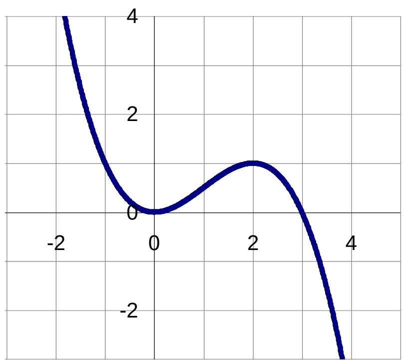
Exercice 1: (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux trois propositions suivantes. La justification est exigée.

1. La courbe ($\mathscr{C}$) ci contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
   L'équation $|f(x)| = 2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



2. On pose , pour tout x réel , $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.
   Si $x \in \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$ alors $f(x) > 0$.
3. Si $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $\sin a = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ alors $\cos 2a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice 2 : (6 points)

Soi f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4|x|+4}$. On note ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

   b) Montrer que f est paire.

   c) Montrer que f admet un minimum que l'on précisera.

2. a) Calculer les limites de f en 2 et en $+\infty$.
   b) En déduire les asymptotes à ($\mathscr{C}$).

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \begin{cases} -x+2+\dfrac{1}{2x+1} & \text{, si } x < -1 \\ \dfrac{x^2+1}{x^2-4|x|+4} & \text{, si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{8\sqrt{x+3}-16}{x-1} & \text{, si } x > 1 \\ a & \text{, si } x = 1 \end{cases}$$

   a) Montrer que g est continue en -1.

   b) Déterminer le réel a pour que g soit continue en 1.

Exercice 3: (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points A(4, 0) , $B\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$ et C le point tel que OACB soit un losange $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

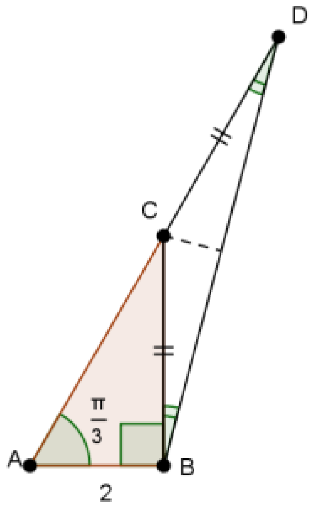
1. Montrer que l'aire du triangle OAB est $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left|\text{dét}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\right|$ puis calculer $\mathcal{A}$.
2. Déterminer les coordonnées polaires de B.
3. Soit H le centre du losange OACB.

   a) Montrer que $OH=\frac{2}{AB}\times\mathcal{A}$.

   b) Déterminer les coordonnées polaires de C.

Exercice 4: (6 points)

Sur le dessin ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B , AB = 2 et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le point D appartient à la droite (AC) et CD= BC.



1.a) Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$.

b) En recalculant autrement $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, démontrer que AC = 4.

2. a) Démontrer que CB = $2\sqrt{3}$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=-6\sqrt{3}$.

3. a) Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$.

b) En remarquant que $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$.

c) En recalculant autrement $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$, démontrer que $BD=2\sqrt{3}.\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\right)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. Faux

En effet : $\left|f(x)\right| = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$ ou $f(x) = -2$ donc l'équation $\left|f(x)\right| = 2$ admet deux racines.

2. Vrai.

En effet :

On a : $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ donc $f(x) = r\cos(x - \varphi)$

Avec $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ et $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

D'où $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Or $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$.

Ainsi , pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$, $f(x) > 0$.

3. Vrai.

En effet : $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2 :

1. a) f(x) existe $\Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 4 \neq 0 \Leftrightarrow \left(|x| - 2\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$.

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

b) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ et f(-x) = f(x) donc f est paire.

c) On a : $f(0) = \frac{1}{4}$, calculons, alors pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

$f(x) - \frac{1}{4} = \frac{x^2+1}{x^2 - 4|x| + 4} - \frac{1}{4} = \frac{3x^2 + 4|x|}{4\left(|x| - 2\right)^2} \geq 0$ donc $f(x) \geq \frac{1}{4}$.

Par suite : f admet un minimum en 0 qui vaut $\frac{1}{4}$.

2. a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+1}{\left(|x| - 2\right)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$.

b) La droite d'équation x = 2 est asymptote verticale à ($\mathscr{C}$) et comme f est paire alors la droite d'équation x = -2 est asymptote verticale à ($\mathscr{C}$).

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ et comme f est paire alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

3. a) On a : g(-1) = $f(-1) = 2$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 2 = g(-1)$

et $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} -x+2+\dfrac{1}{2x+1} = 2 = g(-1)$.

Donc g est continue en -1.

b) On a : g(1) = a , $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$

et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{8\sqrt{x+3}-16}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{8(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{8}{\sqrt{x+3}+2} = 2$.

Pour que f soit continue en 2 , il faut que $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$ d'où $a = 2$.

Exercice 3 :

1. L'aire du triangle OAB est $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}OA.OB.\left|\sin\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\right|$.

Or $\sin\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\text{dét}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}{OA.OB}$, il en résulte : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left|\text{dét}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\right|$.

$\mathcal{A} = \text{dét}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 8\sqrt{2}$ donc $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$.

2. $OB = \mathcal{A} = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Soit θ la mesure principale de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$, $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

D'où les coordonnées polaires de B sont $\left(4, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

3. a) H est le centre du losange OACB donc les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires en H d'où H est le projeté orthogonal de O sur (AB).

Par suite , l'aire du triangle OAB est $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}OH.AB \Leftrightarrow OH = \dfrac{2}{AB}.\mathcal{A}$.

b) $OC = 2.OH = \dfrac{4}{AB}.4\sqrt{2} = \dfrac{16\sqrt{2}}{\sqrt{\left(-2\sqrt{2}-4\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{16\sqrt{2}}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

et $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{3\pi}{8}[2\pi]$.

Donc les coordonnées polaires de C sont $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 4 :

1. a) B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = 4$.

   b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2AC \times \frac{1}{2} = AC$ d'où $AC = 4$.

2. a) ABC est un triangle rectangle en B donc $CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

   b) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = CB.CD.\cos\left(BCD\right) = CB^2\cos\left(\pi - ACB\right) = 12\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

   $= 12\cos\frac{5\pi}{6} = 12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6\sqrt{3}$.

3. a) BCD est un triangle isocèle en C donc

$2\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $k' = 2k,\ k' \in \mathbb{Z}$: alors $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{11\pi}{12} + 2k'\pi$

Si $k' = 2k - 1,\ k' \in \mathbb{Z}$: alors $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{11\pi}{12} - \pi + 2k'\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k'\pi$.

Comme l'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$ est indirect alors sa mesure principale est $-\frac{\pi}{12}$.

b) On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$.

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

c) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(CB^2 + CD^2 - BD^2\right) = \frac{1}{2}\left(24 - BD^2\right)$ d'où $\frac{1}{2}\left(24 - BD^2\right) = -6\sqrt{3}$

donc $24 - BD^2 = -12\sqrt{3}$ donc $BD^2 = 24 + 12\sqrt{3} = 12\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Ainsi $BD = \sqrt{12\left(2+\sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\right)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$ donc l'ensemble Γ est l'arc orienté $\widehat{DB}$ privé de B et D du cercle de centre C et passant par B.