Lycée IBN KHALDOUN RADES Mr ABIDI Farid	Devoir de synthèse n ° 2 Mathématiques Mars 2012	Classe 3 M_1 Durée 3 heures Coefficient: 4

Le sujet comporte trois page numérotées 1/3 – 2/3 – 3/3

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « **Vrai** » ou « **Faux** » à chacune des propositions suivantes. La justification est exigée.

1. La forme trigonométrique du nombre complexe $1+i\tan\frac{3\pi}{5}$ est $\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. Si les entiers naturels non nul x et y sont tels que x < y et $x \wedge y = 17$ alors $x^3.y^2 = 289$.

3. La tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{2x^2+3x+4}$ passe par le point $A\left(-\frac{2}{5},0\right)$.

Exercice 2 (4 points)

Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
on donne les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 1-i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = 1+i\sqrt{3}$.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et z_C. Placer les points A , B et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère OABC.
3. Soit (Δ) l'ensemble des points M(z) tels que $z+\bar{z}-2=0$.
   a) Vérifier que A et C sont deux points de (Δ).
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Δ).

4. A tout point M d'affixe z tel que $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{4}{2-z}$.
   a) Déterminer le point A' associé à A et le point C' associé à C.
   b) Prouver que pour tout nombre complexe $z \neq 2$, $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.
   c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit (Δ)

Exercice 3 (4 points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1,\ n \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3,\ n \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1}+1$.
2. a) Calculer $x_8 \wedge x_9$ puis $x_{202} \wedge x_{203}$.
   Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part et pour x_{202} et x_{203} d'autre part ?
   b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux, pour tout entiers naturel n ?
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.
   b) Exprimer y_n en fonction de n.

Exercice 4 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+2u_n}$ pour tout $n \geq 0$

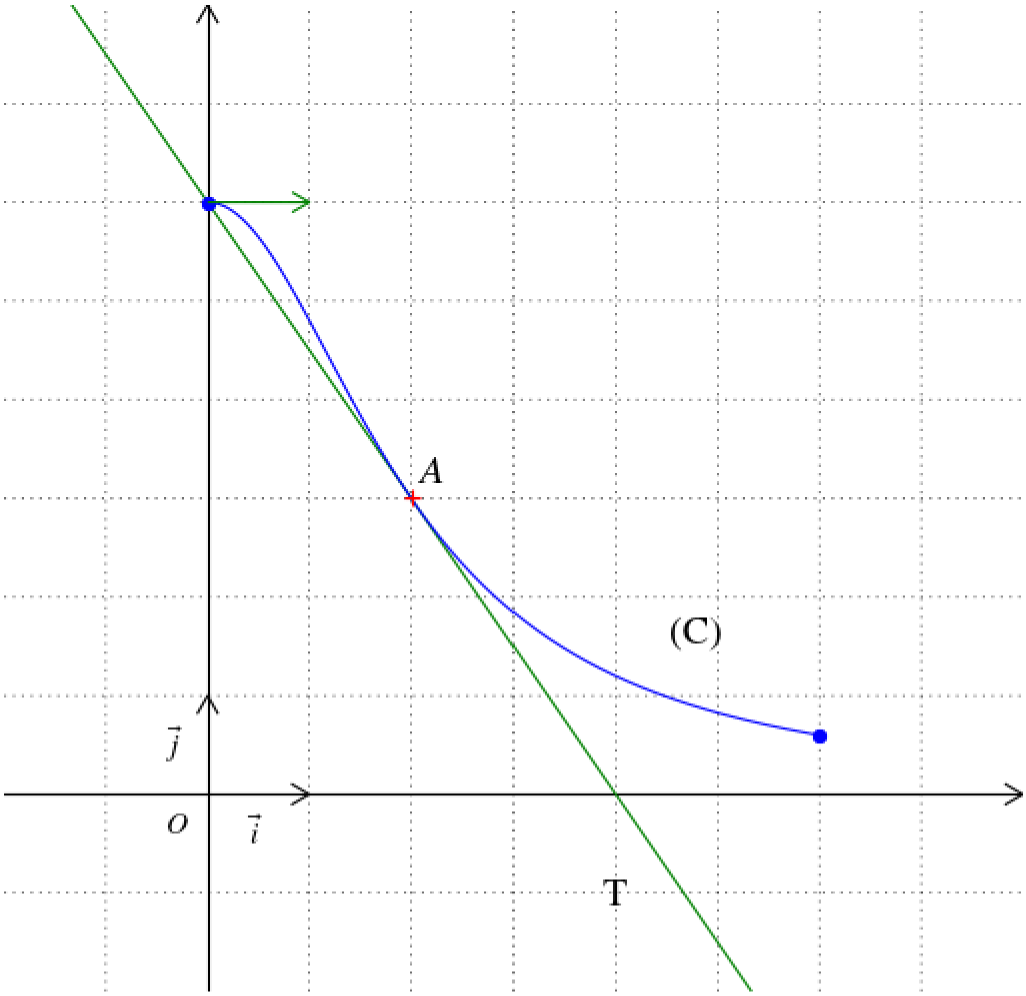
1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Soit n un entier naturel. Montrer que : si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq -1$ et $u_n \neq 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Montrer que la suite est bornée.
4. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ pour tout entier naturel n.
   Calculer v_0, v_1 et v_2.
5. Justifier que $v_n \neq 2$ pour tout entier naturel n et montrer que $u_n = \dfrac{1}{v_n - 2}$.
6. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
7. Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
La courbe représentative (C) à la page 3-3 est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle [0, 6]. (T) est la tangente à (C) au point A d'abscisse 2.

1. Lecture graphique.
   a) Donner f(2) , f(0) et f '(2) .
   b) Montrer que pour tout x de [0, 6] , $f(x) \geq -\dfrac{3}{2}x + 6$.
2. On suppose que pour tout x de [0, 6] , $f(x) = \dfrac{a}{x^2 + b}$.
   a) Calculer f '(x) pour tout x de [0, 6].
   b) Prouver que a = 24 et b = 4.
   c) Dresser la tableau de variations de f.
3. Soit M un point de (C) d'abscisse x. H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On appelle g(x) l'aire du triangle OMH.
   a) Exprimer g(x) en fonction de x puis étudier les variations de g.
   b) Tracer la courbe représentative de g dans un nouveau repère d'unité graphique 1 cm.
   c) Quelle est la position de M sur (C) , pour laquelle l'aire du triangle OMH est maximale ?

3/3



CORRIGE

Exercice 1

1. Faux.

   En effet :

   On a : $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)=1+i\tan\dfrac{2\pi}{5}\neq 1+i\tan\dfrac{3\pi}{5}$, $\tan\dfrac{2\pi}{5}>0$ et $\tan\dfrac{3\pi}{5}<0$.

2. Faux

   En effet : prenons $x=17$ et $y=34$, d'où $x<y$ et $x\wedge y=17$.

   Et pourtant : $x^3.y^2=5679428$.

3. Faux.

   En effet : soit $f(x)=\sqrt{2x^2+3x+4}$, donc $f(2)=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

   Pour tout x réel , $f'(x)=\dfrac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+4}}$, d'où $f'(2)=\dfrac{11}{6\sqrt{2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{12}$.

   La tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de la fonction f est d'équation

   $y=f'(2).(x-2)+f(2)=\dfrac{11\sqrt{2}}{12}(x-2)+3\sqrt{2}$.

   Prenons $x=-\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{11\sqrt{2}}{12}\left(-\dfrac{2}{5}-2\right)+3\sqrt{2}=\dfrac{11\sqrt{2}}{12}\left(-\dfrac{12}{5}\right)+3\sqrt{2}=-\dfrac{11\sqrt{2}}{5}+3\sqrt{2}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\neq 0$ donc

   cette tangente ne passe pas par le point $A\left(-\dfrac{2}{5},0\right)$.

Exercice 2 (4 points)

Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,
on donne les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=1-i\sqrt{3}$, $z_B=2$ et $z_C=1+i\sqrt{3}$.

1. $z_A=1-i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

   et $z_C=1+i\sqrt{3}=\overline{z_A}=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

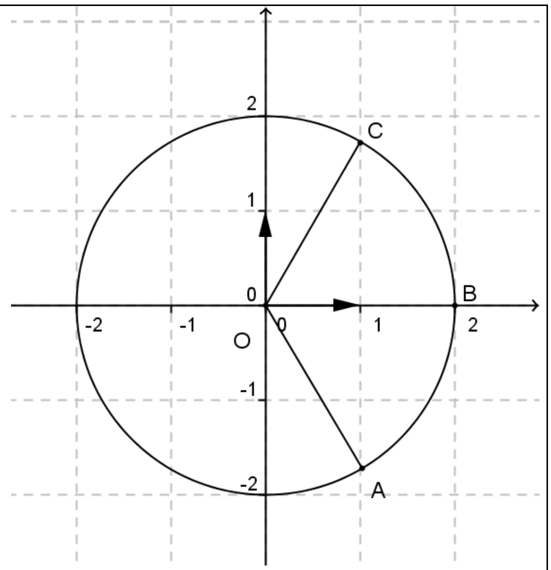
2. On a : $Z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=1-i\sqrt{3}$

   Et $Z_{\overrightarrow{CB}}=z_B-z_C=2-\left(1+i\sqrt{3}\right)=1-i\sqrt{3}$.

   Donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$ d'où OABC est un parallélogramme.

   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{OB}$

   Donc OABC est un losange.



3. a) $z_A+\overline{z_A}-2=1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}-2=0$ et $z_C+\overline{z_C}-2=1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}-2=0$ donc A et C sont deux points de (Δ).

   b) Posons z = x+ iy où x et y sont réels ,

   $M(z)\in(\Delta)\Leftrightarrow z+\bar{z}-2=0\Leftrightarrow x+iy+x-iy-2=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$.

   Donc (Δ) est la droite d'équation x = 1.

4. A tout point M d'affixe z tel que $z\neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z'=\dfrac{4}{2-z}$.

   a) $z_{A'}=\dfrac{4}{2-z_A}=\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}=4\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}=1-i\sqrt{3}=z_A$ donc A' = A .

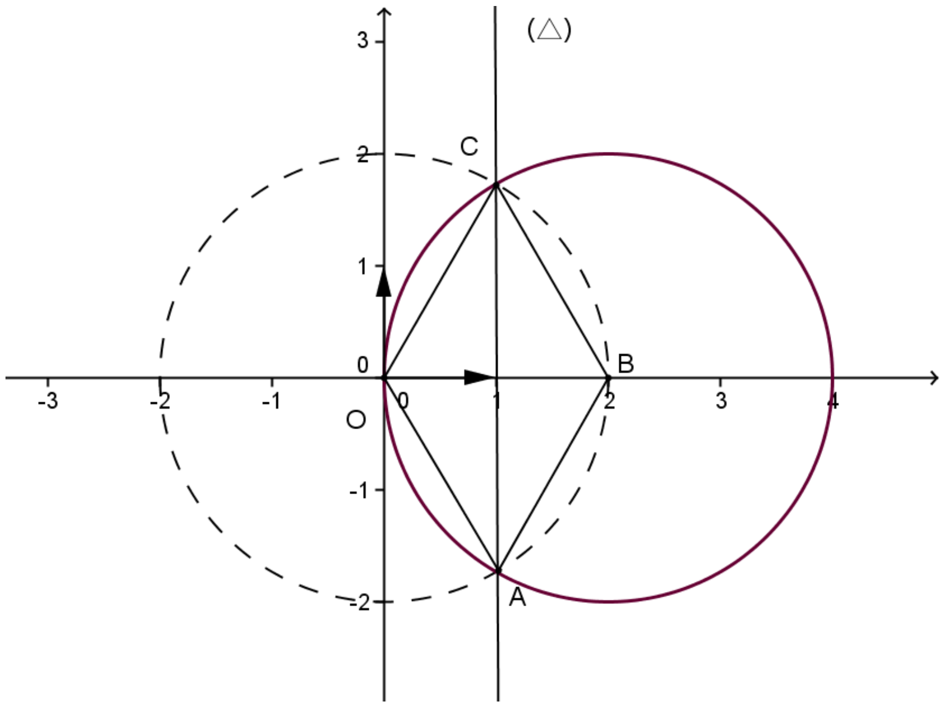
   $z_{C'}=\dfrac{4}{2-z_C}=\dfrac{4}{1-i\sqrt{3}}=4\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}=1+i\sqrt{3}=z_C$ donc C' = C.

   b) Pour tout nombre complexe $z\neq 2$, $|z'-2|=\left|\dfrac{4}{2-z}-2\right|=\left|\dfrac{2z}{2-z}\right|=\dfrac{|2z|}{|2-z|}=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

   c) (Δ) est la médiatrice du segment [OB] donc lorsque M décrit (Δ) , MO = MB ou encore

$|z|=|z-2|$ d'où $\dfrac{|z|}{|z-2|}=1$ donc $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}=2$ donc BM' = 2 .

Ainsi , l'ensemble des points M' lorsque M décrit (Δ) est le cercle de centre B et de rayon 2.



Exercice 3

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1,\ n \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3,\ n \geq 0 \end{cases}$$

3. On a : $x_0 = 3 = 2^{0+1} + 1$.

   On suppose que : $x_n = 2^{n+1} + 1$, où n est un entier naturel, et on montre que : $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

   $x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2.(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+1} + 1$.

   Ainsi, pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

4. a) $x_8 = 2^9 + 1 = 513 = 3^3 \times 19$ et $x_9 = 2^{10} + 1 = 1025 = 5^2 \times 41$ donc $x_8 \wedge x_9 = 1$.

   On a : $x_{202} = 2^{203} + 1$ et $x_{203} = 2^{204} + 1$.

   $2^{204} = 1 \times (2^{203} + 1) + 2^{203}$

   $2^{203} + 1 = 1 \times 2^{203} + 1$

   Donc $x_{202} \wedge x_{203} = 1$.

On en déduit que x_8 et x_9 d'une part et pour x_{202} et x_{203} d'autre part sont premiers entre eux.

   b) On a : $x_n = 2^{n+1} + 1$ et $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

   $2^{n+2} = 1 \times (2^{n+1} + 1) + 2^{n+1}$

   $2^{n+1} + 1 = 1 \times 2^{n+1} + 1$

   Donc $x_n \wedge x_{n+1} = 1$. Par suite, x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux, pour tout entiers n.

4. a) On a : $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$

   On suppose que : $2x_n - y_n = 5$ et on montre que $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$.

   $2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3) = 2(2x_n - y_n) - 5 = 10 - 5 = 5$.

   Donc pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

   c) Pour tout entier naturel n, $y_n = 2x_n - 5 = 2(2^{n+1} + 1) - 5 = 2^{n+2} - 3$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + 2u_n}$ pour tout $n \geq 0$

1. $u_1 = \dfrac{u_0}{2 + 2u_0} = \dfrac{1}{4}$ et $u_2 = \dfrac{u_1}{2 + 2u_1} = \dfrac{1}{10}$.
2. Soit n un entier naturel. si $u_n > 0$ alors $2 + 2u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

   On a : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.

   Par suite, pour tout entier n, $u_n > 0$.

   D'où pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq -1$ et $u_n \neq 0$.
3. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{2 + 2u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(2 + 2u_n)}{2 + 2u_n} = -\dfrac{u_n(1 + 2u_n)}{2 + 2u_n} < 0$ donc la

   suite (u_n) est décroissante.

Il en suit : pour tout entier n , $0<u_n\le u_0$ d'où $0<u_n\le 1$. Ainsi , la suite est bornée.

4. On pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$ pour tout entier naturel n.

$v_0=\dfrac{1}{u_0}+2=3,\ v_1=\dfrac{1}{u_1}+2=\dfrac{7}{3}$ et $v_2=\dfrac{1}{u_2}+2=\dfrac{17}{7}$.

5. Comme pour tout entier n , $u_n\ne 0$ et $\dfrac{1}{u_n}\ne 0$ alors $v_n\ne 2$.

D'autre part , $v_n=\dfrac{1}{u_n}+2\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n}=v_n-2\Leftrightarrow u_n=\dfrac{1}{v_n-2}$.

6. Pour tout entier n , $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}+2=\dfrac{2+2u_n}{u_n}+2=\dfrac{2}{u_n}+4=2\left(\dfrac{1}{u_n}+2\right)=2v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

7. Pour tout entier n , $v_n=v_0.2^n=3.2^n$ donc $u_n=\dfrac{1}{v_n-2}=\dfrac{1}{3.2^n-2}$.

2 > 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}3.2^n+2=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$,
La courbe représentative (C) à la page 3-3 est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle [0, 6]. (T) est la tangente à (C) au point A d'abscisse 2.

1. Lecture graphique.

a) f(2) = 3 , f(0) = 6 et $f'(2)=-\dfrac{3}{2}$.

b) On a d'une part , La courbe (C) est située au dessus de (T) sur l'intervalle [0, 6] et d'autre part , une équation de la tangente (T) est $y=-\dfrac{3}{2}(x-2)+3=-\dfrac{3}{2}x+6$.

Donc pour tout x de [0, 6] , $f(x)\ge-\dfrac{3}{2}x+6$.

2. On suppose que pour tout x de [0, 6] , $f(x)=\dfrac{a}{x^2+b}$.

a) Pour tout x de [0, 6], $f'(x)=-a.\dfrac{2x}{(x^2+b)^2}=-\dfrac{2ax}{(x^2+b)^2}$.

b) $\begin{cases}f(0)=6\\ f(2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b}=6\\ \dfrac{a}{4+b}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6b\\ a=12+3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6b\\ 3b=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=24\\ b=4\end{cases}$.

c) Pour tout x de [0, 6], $f(x)=\dfrac{24}{x^2+4}$ et $f'(x)=-\dfrac{48x}{(x^2+b)^2}\le 0$

Le tableau de variation de f est :

x	0		6
f'(x)	0	-	
f(x)	6	$\searrow$	$\frac{3}{5}$

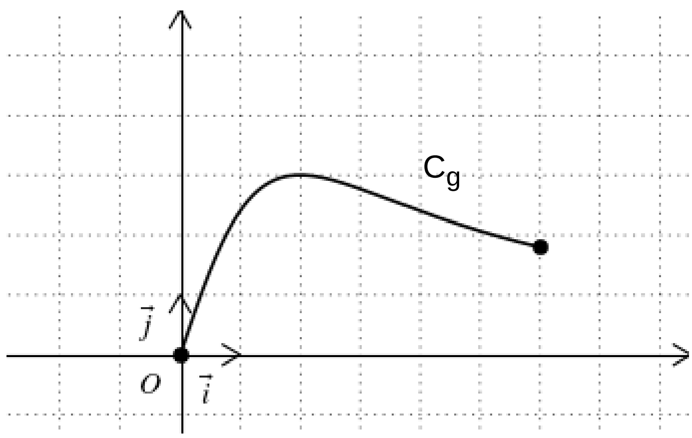
3. Soit M un point de (C) d'abscisse x. H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On appelle g(x) l'aire du triangle OMH.

a) Pour tout x de [0, 6] , g(x) = $\frac{1}{2}x.f(x)=\frac{12x}{x^2+4}$.

$$g'(x)=\frac{12\left(x^2+4\right)-12x.2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{12\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{-12(x-2)(x+2)}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

x	0		2		6
g'(x)		+	0	-	
g(x)	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{9}{5}$

b) la courbe représentative de g dans un nouveau repère d'unité graphique 1 cm est :



c) Lorsque M est confondu avec B , l'aire du triangle OMH est maximale est vaut 3.