LYCEE IBN KHALDOUN – RADES Mr ABIDI Farid	DEVOIR DE SYNTHESE N°2 MATHEMATIQUES	3 M ***DUREE : 3h Jeudi 07 / 03 / 2013

Exercice 1 (3 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux propositions suivantes en justifiant la réponse.

1. La fonction $f : x \mapsto (x+1)^3$ admet un extremum local en -1.
2. $5^{2013} \times \left[C_{2013}^{0} - \frac{3}{5} C_{2013}^{1} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 C_{2013}^{2} - \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^{2012} C_{2013}^{2012} - \left(\frac{3}{5}\right)^{2013} C_{2013}^{2013} \right] = 2^{2013}$.
3. Si (C) est la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x^3 + x - 1$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors le point I(0, -1) est un centre de symétrie de (C).

Exercice 2 (3 points)

1. Une urne contient 4 boules rouges, 3 noires et 2 vertes. On tire trois boules dans cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre la suivante.

Quel est le nombre de tirages de trois boules de même couleur?

2. Déterminer le nombre de mots de 4 lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot DEVOIR et qui commencent et se terminent par une consonne?
3. Quel est le nombre de droites passant par deux sommets d'un hexagone ?

Exercice 3 (4 points)

1. Rappeler les formules $\sin(a+b)$ et $\cos(2a)$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ et $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
3. On considère l'inéquation (I) : $\frac{1}{2}\sin(3x) + \cos(2x) - 1 > 0$.

   a) Vérifier que pour tout x réel, $\frac{1}{2}\sin(3x) + \cos(2x) - 1 = \sin x\left(-2\sin^2 x - 2\sin x + \frac{3}{2}\right)$.

   b) Justifier que , pour tout x réel, $-2\sin^2 x - 2\sin x + \frac{3}{2} = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{3}{2}\right)$.

   c) Résoudre (I) dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice4 *(5 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 2cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme trigonométrique.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}iz^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a. Donner l'écriture trigonométrique des affixes des points A', B' et C'.

b. Placer les points A', B' et C'.
c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G le point défini par $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. On note G' le point associé à G par *f*.

a. Déterminer les affixes des points G et G'.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\left|iz+\frac{3}{4}\right|=\left|\bar{z}+\frac{3}{2}\right|$.

<u>Exercice 5</u> (5 points)

1. Soit g la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par g(x) = $x^3-12x+3$.

a) Etudier les variations de g sur $[2,+\infty[$.

b) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet sur $[2,+\infty[$ une unique solution α.
Vérifier que 3,3 < α < 3,4.

c) Déterminer le signe de g(x) sur $[2,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par f(x) = $\frac{2x^3-3}{4-x^2}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 1 cm).

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)+2x$.

c) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) puis étudier la position relative de (C) et (D).

d) Démontrer que, pour tout x > 2, $f'\left(x\right)=\frac{2x.g\left(x\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

f) Montrer que $f\left(\alpha\right)=-3\alpha$ et en déduire un encadrement de $f\left(\alpha\right)$.

g) Tracer (C) et ses asymptotes.

Corrigé

Exercice 1 :

1. Faux

   $f : x \mapsto (x+1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 3(x+1)^2 \geq 0$.

   f' s'annule en -1 et ne change pas de signe donc f n'admet d'extremum en -1.

2. Vrai

$$5^{2013} \times \left[C_{2013}^0 - \frac{3}{5} C_{2013}^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 C_{2013}^2 - \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^{2012} C_{2013}^{2012} - \left(\frac{3}{5}\right)^{2013} C_{2013}^{2013} \right]$$

$$= 5^{2013} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{2013} = 5^{2013} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{2013} = 2^{2013}$$

3. Faux

   Pour tout x réel, $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

   et f(-x) + f(x) = $-x^3 - x - 1 + x^3 + x - 1 = -2$

   Donc I(0, -1) est centre de symétrie de (C).

Exercice 2 :

1. Le nombre de tirage de 3 boules de même couleur est : $4^3 + 3^3 + 2^3 = 99$.
2. le nombre de mots de lettres différentes que l'on peut former est : $A_3^2 \times A_4^2 = 6 \times 12 = 72$.
3. le nombre de droite passant par deux sommets d'un hexagone est $C_6^2 = 15$.

Exercice 3 :

1. $\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$ et $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$.
2. Pour tout réel x, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

   et $\sin(3x) = \sin(x + 2x) = \sin x.\cos(2x) + \cos x.\sin(x) = \sin x(1 - 2\sin^2 x) + \cos x.2\sin x.\cos x$

   $= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x.\cos^2 x = \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

3. On considère l'inéquation (I) : $\frac{1}{2}\sin(3x) + \cos(2x) - 1 > 0$.

   a) Pour tout x réel,

   $$\frac{1}{2}\sin(3x) + \cos(2x) - 1 = \frac{3}{2}\sin x - 2\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x - 1 - 2\sin^3 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x$$

   $$= \sin x\left(-2\sin^2 x - 2\sin x + \frac{3}{2}\right)$$

   b) Justifier que, pour tout x réel,

   $$-2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{3}{2}\right) = -2\left(\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4}\right) = -2\sin^2 x - 2\sin x + \frac{3}{2}.$$

   Donc $-2\sin^2 x - 2\sin x + \frac{3}{2} = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{3}{2}\right)$.

   c) l'inéquation (I) est équivalente à $\frac{1}{2}\sin(3x) + \cos(2x) - 1 > 0$

   équivaut à $\sin x\left(-2\sin^2 x - 2\sin x + \frac{3}{2}\right) > 0$

équivaut à $-2\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)>0$

équivaut à $\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)<0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinx		-	0	+		+		+	
$\sin x-\frac{1}{2}$		-		-	0	+	0	-	
$\sin x+\frac{3}{2}$		+		+		+		+	
Produit		+	0	-	0	+	0	-	

L'ensemble de solutions de l'inéquation (I) dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est $\left]0,\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 4 :

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B=\overline{z_A}$ et $z_C=-3$

Partie A

1. $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

et $z_B=\overline{z_A}=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

2. figure :

3.Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1}{3}iz^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a. $z_{A'}=\frac{1}{3}iz_A{}^2=\frac{1}{3}i\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{3}i\left(\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

ou encore :

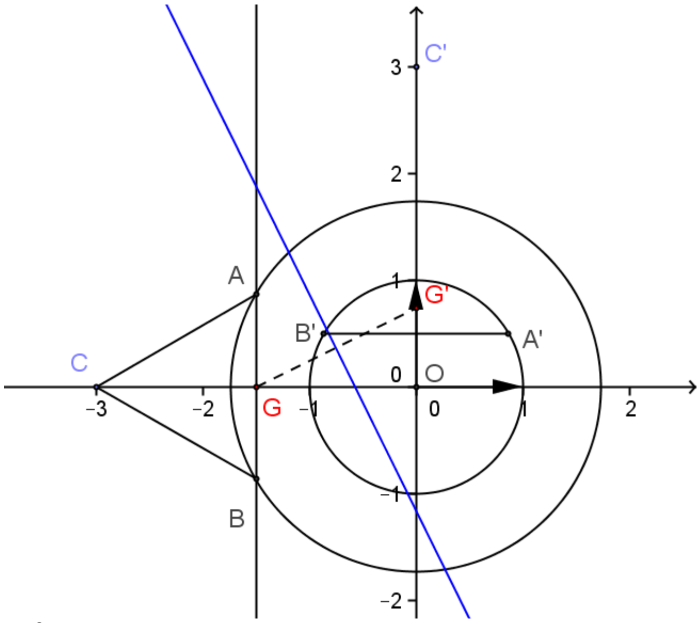
$$z_{A'}=\frac{1}{3}iz_A{}^2=\frac{1}{3}i3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$z_{B'}=\frac{1}{3}iz_B{}^2=\frac{1}{3}i\overline{z_A}^2=\frac{1}{3}i\left(\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$z_{C'}=\frac{1}{3}i{z_C}^2=3i$$

b.



c. <u>1^e méthode</u> :

$\arg(z_A)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $\arg(z_{B'})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ donc $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ d'où $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OB'}\right)[2\pi]$ et par suite $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'}\right)\equiv0[2\pi]$. Ainsi , les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires donc les points O, A et B' sont alignés.

<u>2^e méthode</u> :

On a : $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}z_{B'}$ donc $\overrightarrow{OA}=\sqrt{3}\overrightarrow{OB'}$. Ainsi , les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires donc les points O, A et B' sont alignés.

On a : $z_B=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}z_{A'}$ donc $\overrightarrow{OB}=-\sqrt{3}\overrightarrow{OA'}$. Ainsi , les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires donc les points O, B et A' sont alignés.

2. Soit G le point défini par $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. On note G' le point associé à G par *f*.

a. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ donc $z_G=\frac{1}{4}\left(z_A+z_B+z_C\right)=-\frac{3}{2}$.

$$z_{G'}=\frac{1}{3}i{z_G}^2=\frac{3}{4}i.$$

b. $\left|iz+\frac{3}{4}\right|=\left|\bar{z}+\frac{3}{2}\right|\Leftrightarrow\left|i\left(z-\frac{3}{4}i\right)\right|=\left|\overline{\left(z+\frac{3}{2}\right)}\right|\Leftrightarrow|i|.\left|z-\frac{3}{4}i\right|=\left|z-\left(\frac{3}{2}\right)\right|$

$\Leftrightarrow|z-z_{G'}|=|z-z_G|\Leftrightarrow G'M=GM$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|iz+\frac{3}{4}\right|=\left|\bar{z}+\frac{3}{2}\right|$ est la médiatrice du segment [GG'].

Exercice 5

1. Soit g la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par g(x) = $x^3-12x+3$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

g est dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour tout x de $[2,+\infty[$,

$g'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)\geq 0$.

x	2	$+\infty$
g'(x)	0 +	
g(x)	-13 ↗	$+\infty$

b) On a : g est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$, $g([2,+\infty[)=[-13,+\infty[$ et $0\in[-13,+\infty[$ donc l'équation g(x) = 0 admet sur $[2,+\infty[$ une unique solution α.

$g(3,3)\simeq-0,663$ et $g(3,4)\simeq1,504$ donc 3,3 < α < 3,4.

c) On a : g(α) = 0 .

Si $2\leq x<\alpha$ alors $g(x)<g(\alpha)$ donc $g(x)<0$.

Si $x>\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)$ donc $g(x)>0$.

D'où :

x	2	α	$+\infty$
g(x)	-	0	+

2. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par f(x) = $\frac{2x^3-3}{4-x^2}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

a) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à (C).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3+2x(4-x^2)}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3+8x}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{8x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{8}{x}=0$.

c) la droite D d'équation y = 2x est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Pour tout x > 2 , f(x) + 2x = $\frac{-3+8x}{4-x^2}<0$ donc (C) est au dessous de (D).

d) Pour tout x > 2,

$$f'(x)=\frac{6x^2\left(4-x^2\right)+2x\left(2x^3-3\right)}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{-2x^4+24x^2-6x}{\left(4-x^2\right)^2}$$

$$=-\frac{2x\left(x^3-12x+3\right)}{\left(4-x^2\right)^2}=-\frac{2x.g\left(x\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$$

e) Comme pour tout x > 2, $-\frac{2x}{\left(4-x^2\right)^2}<0$ alors f'(x) et g(x) sont de signes contraires sur

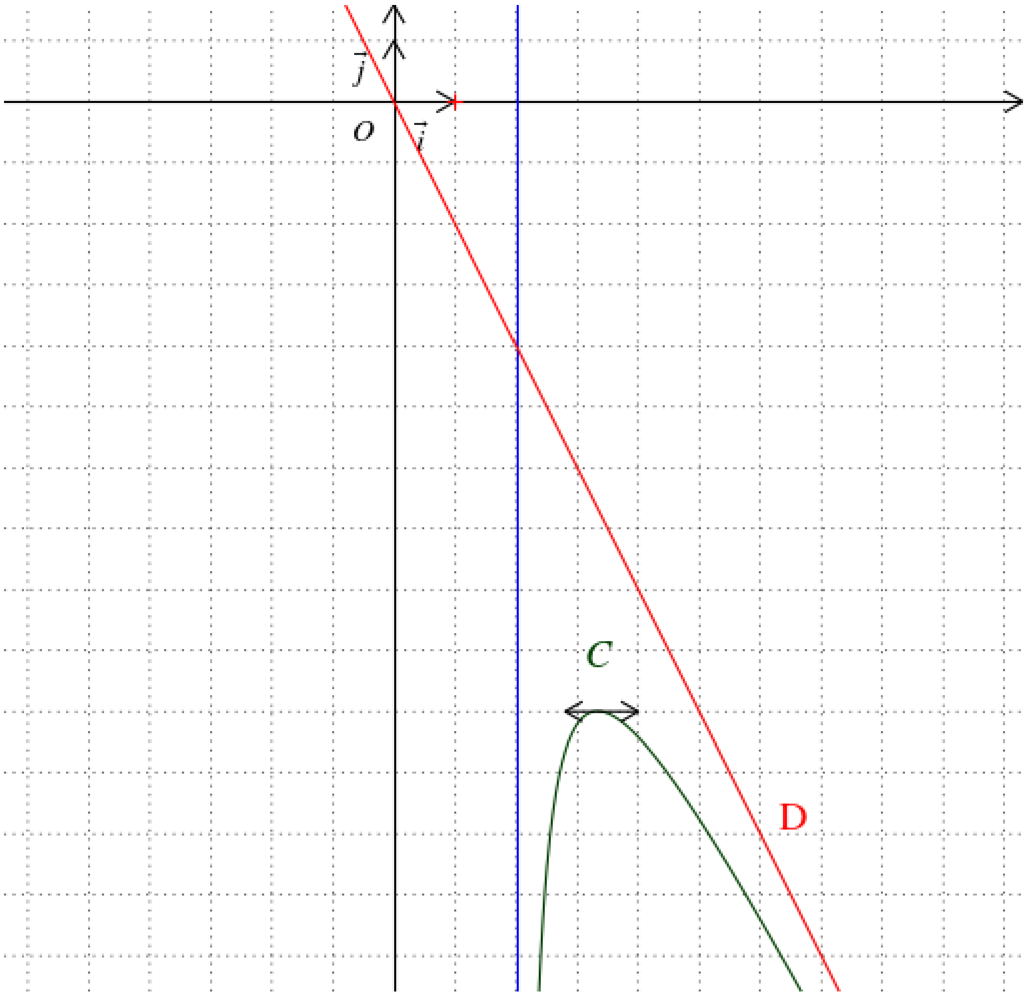
$\left]2,+\infty\right[$.

x	2		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	f(α)	↘	$-\infty$

f) On a : $g\left(\alpha\right)=0\Leftrightarrow\alpha^3-12\alpha+3=0$,

$f\left(\alpha\right)-\left(-3\alpha\right)=\frac{2\alpha^3-3+12\alpha-3\alpha^3}{4-\alpha^2}=\frac{-\alpha^3+12\alpha-3}{4-\alpha^2}=-\frac{g\left(\alpha\right)}{4-\alpha^2}=0$ donc $f\left(\alpha\right)=-3\alpha$. 3,3 < α < 3,4 donc -10,2 < $f\left(\alpha\right)$ < -9,9.

g)


$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
C
D