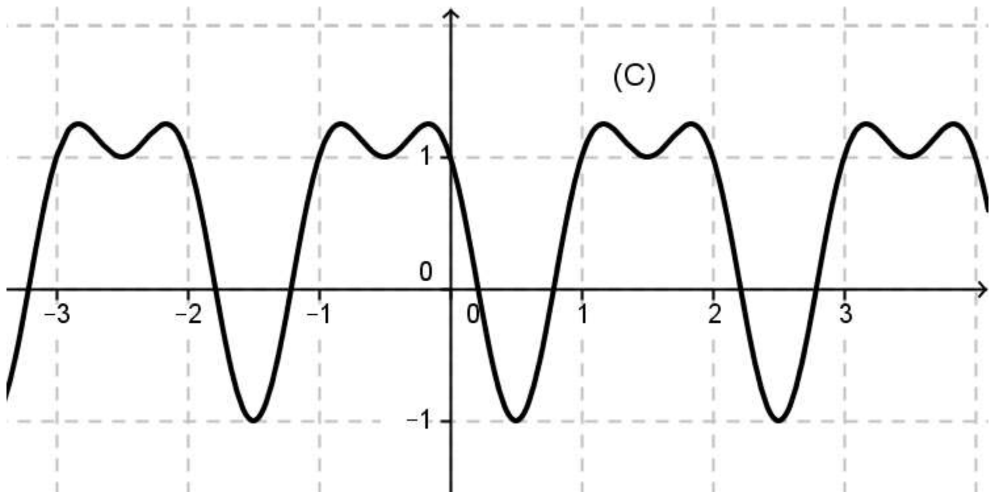
Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 – (3 points).



Ci-dessus est tracée la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé du plan. On donne $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponse est exacte. Indiquer sur vôtre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Justifier vôtre réponse.

1. f est périodique de période :
   a) 1. ; b) 2 ; c) 3.
2. $f\left(\frac{2013}{2}\right)$ est égal à :
   a) -1 ; b) 0 ; c) 1
3. Le nombre de solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet dans l'intervalle [3, 5] est :
   a) 4 ; b) 3 ; c) 2

Exercice 2 – (4 points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=\frac{1}{3} \\ U_{n+1}=\frac{3U_n}{1+2U_n}, \ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que , pour tout entier naturel n, on a : $0<U_n<1$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$.

   b) Déduire que la suite (U_n) est croissante.

3. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{1-U_n}{2U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 3– (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x+\sqrt{x^2+4x} \text{ , si } x \geq 0 \\ f(x) = -x+\sqrt{x^2-4x} \text{ , si } x < 0 \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe (C).
2. a) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D) d'équation y = 2x + 2 est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout x > 0 et dresser le tableau de variations de f sur [0, + ∞ [.

4. Tracer (D) et (C).

Exercice 4 - (4 points)

Une urne U contient **quatre** boules numérotées **1**, **trois** boules numérotées **2** et **une** boule numérotée **5**.
Une autre urne V contient **trois** boules numérotées **1** et **cinq** boules numérotées **2**.

Partie A- On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « les deux boules tirées portent le même numéro »

F : « le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées est 10 ».

Partie B- On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V. On compte la somme S des numéros portés par les boules tirées.

1. Donner les cinq valeurs possibles de S.
2. Vérifier que la probabilité d'avoir (S = 3) est égale à $\dfrac{29}{64}$.
3. Déterminer la probabilité de chacune des quatre autres valeurs de S.

Exercice 5 - (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$, on considère les points A(-2, 0, 1) , B(1, 2, -1) et C(-2, 2, 2).

1. a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$;
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 2z + 2 = 0$.

2. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre OABC.

3. Soit P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
   Montrer que P_1 et P_2 sont sécants selon une droite (D) dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}.$$

4. Soit (Γ_t) l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient
   $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2(1-3t)y - 2tz + 10t^2 - 6t - 4 = 0$.
   a) Montrer que pour tout t réel, (Γ_t) est une sphère de rayon 3 et de centre I_t situé sur la droite (D).
   b) Montrer qu'il existe deux sphères (Γ_{t_1}) et (Γ_{t_2}) tangentes au plan (ABC).
   c) Donner les coordonnées des points J_1 et J_2 d'intersection du plan (ABC) et des sphères respectivement (Γ_{t_1}) et (Γ_{t_2}).

Corrigé

Exercice 1

1. **b**

En effet :

d'après le graphique, on remarque que la courbe de f sur les intervalles $[-3,-1]$, $[-1,-1]$ et $[1,3]$ est la même donc f est périodique de période de période 2.

2. **a**

En effet :

$$f\left(\frac{2013}{2}\right)=f\left(\frac{2\times1006+1}{2}\right)=f\left(1006+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$

3. **c**

En effet :

La droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ coupe la courbe représentative de la restriction sur l'intervalle $[1,3]$ en deux points donc l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet dans l'intervalle [1, 3] deux solutions . Comme est périodique de période 2 alors le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet dans l'intervalle [1, 3] est 2.

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=\frac{1}{3} \\ U_{n+1}=\frac{3U_n}{1+2U_n}\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1. On a : $U_0=\frac{1}{3}$ donc $0<U_0<1$.

On suppose que , $0<U_n<1$ pour un certain entier naturel n , et on montre que $0<U_{n+1}<1$.

- $U_n>0$ donc $3U_n>0$ et $1+2U_n>0$ d'où $U_{n+1}>0$;
- $U_{n+1}-1=\frac{3U_n}{1+2U_n}-1=\frac{U_n-1}{1+2U_n}$ et comme $0<U_n<1$ alors $U_{n+1}<1$.

Ainsi , $0<U_{n+1}<1$.

Par suite , pour tout entier naturel n, $0<U_n<1$.

Remarque :

On pose , pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\frac{3x}{1+2x}$, où $0<x<1$.

f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout x de $]0,1[$, $f'(x)=\frac{3}{(1+2x)^2}>0$ donc f est strictement croissante sur $]0,1[$. Il en suit : $0<U_n<1\Rightarrow f(0)<f(U_n)<f(1)\Rightarrow 0<U_{n+1}<1$.

2. a) Pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{1+2U_n} - U_n = \frac{3U_n - U_n(1+2U_n)}{1+2U_n} = \frac{U_n(2-2U_n)}{1+2U_n} = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}.$$

b) On sait que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$, $1 - U_n > 0$ et $1+2U_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

3. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{1-U_n}{2U_n}$.

a) Pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = \dfrac{1-U_{n+1}}{2U_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{1-U_n}{1+2U_n}}{\dfrac{6U_n}{1+2U_n}} = \dfrac{1-U_n}{6U_n} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1-U_n}{2U_n}\right) = \dfrac{1}{3} V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Pour tout entier naturel n , $V_n = V_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; or $V_0 = \dfrac{1-U_0}{2U_0} = 1$, il en résulte que pour tout entier naturel n , $V_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

D'autre part , pour tout entier naturel n,

$$V_n = \frac{1-U_n}{2U_n} \Leftrightarrow 2U_nV_n = 1 - U_n \Leftrightarrow U_n(2V_n+1) = 1 \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{2V_n+1} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1}.$$

c) Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2+4x} \ , \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2-4x} \ , \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour tout x > 0 , -x < 0 et $f(-x) = -(-x) + \sqrt{(-x)^2 - 4(-x)} = x + \sqrt{x^2+4x} = f(x)$;

Pour tout x < 0 , -x > 0 et $f(-x) = -x + \sqrt{(-x)^2 + 4(-x)} = -x + \sqrt{x^2-4x} = f(x)$;

Donc f est paire d'où la droite des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe (C).

2. a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1+\dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1+\dfrac{x^2+4x}{x\sqrt{x^2+4x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}1+\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+4x}}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à droit au point d'abscisse 0.

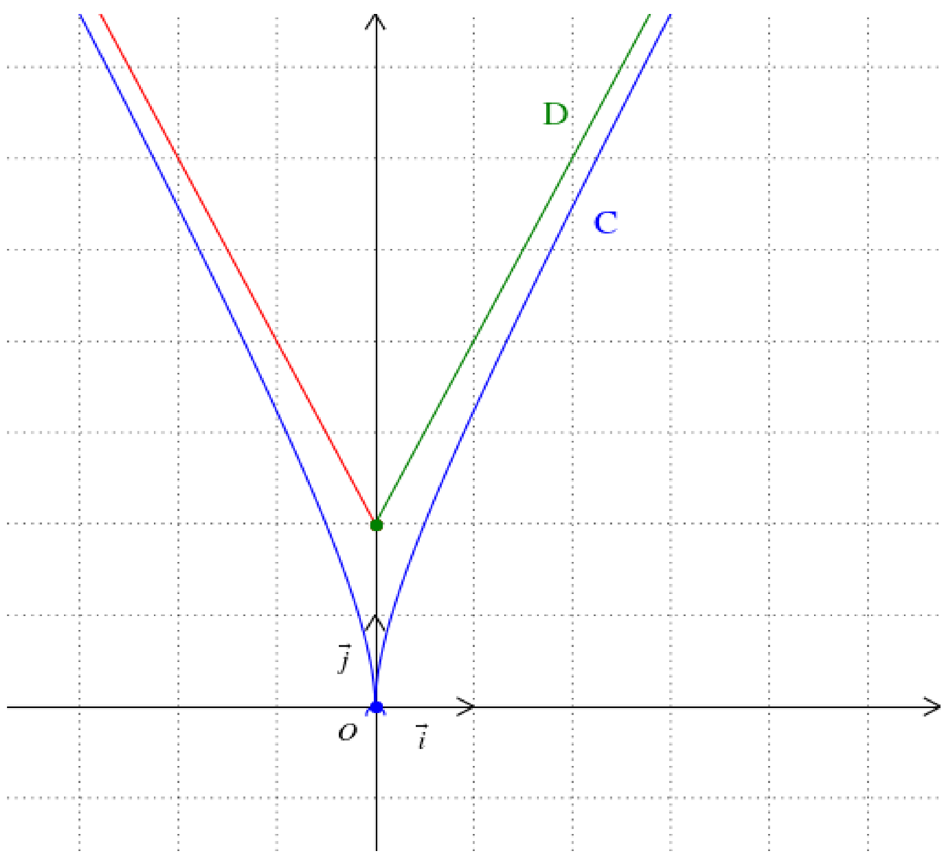
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sqrt{x^2+4x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(2x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x-2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}=0$ donc la droite (D) d'équation $y=2x+2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout $x>0$, $f'(x)=1+\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}=1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}>0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

4.



Exercice 4 -

Une urne U contient **quatre** boules numérotées **1**, **trois** boules numérotées **2** et **une** boule numérotée **5**.
Une autre urne V contient **trois** boules numérotées **1** et **cinq** boules numérotées **2**.

Partie A- On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U.
E : « les deux boules tirées portent le même numéro »

$p(E) = \dfrac{C_4^2 + C_3^2}{C_8^2} = \dfrac{6+3}{28} = \dfrac{9}{28}$; $p(F) = \dfrac{C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \dfrac{3}{28}$

Partie B- On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V. On compte la somme S des numéros portés par les boules tirées.

1. Les cinq valeurs possibles de S sont : 2, 3, 4 , 6 et 7. Voir tableau ci-dessous :

+	1	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	3	3	3	3	3
1	2	2	2	3	3	3	3	3
1	2	2	2	3	3	3	3	3
1	2	2	2	3	3	3	3	3

2	3	3	3	4	4	4	4	4
2	3	3	3	4	4	4	4	4
2	3	3	3	4	4	4	4	4
5	6	6	6	7	7	7	7	7

2. $p(S=3) = \dfrac{29}{64}$

3. $p(S=2) = \dfrac{12}{64} = \dfrac{3}{16}$; $p(S=4) = \dfrac{15}{64}$; $p(S=6) = \dfrac{3}{64}$; $p(S=7) = \dfrac{5}{64}$.

Exercice 5 -

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(-2, 0, 1) , B(1, 2, -1) et C(-2, 2, 2).

1. a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$;

   b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc (ABC) : 6x – 3y + 6z + d = 0 , où d est un réel.
   Or A(-2, 0, 1) $\in (ABC) \Leftrightarrow -12+0+6+d=0 \Leftrightarrow d=6$.
   Donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x-y+2z+2=0$.

2. L'aire du triangle ABC est $A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{36+9+36} = \frac{1}{2}\sqrt{81} = \frac{9}{2}$ et le volume du tétraèdre OABC est $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AO}\right| = \frac{1}{6}\left|12+0+6\right| = 3$.

3. Soit P_1 : $x+y-3z+3=0$ et P_2 : $x-2y+6z=0$.

$$\begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-9z+3=0 \\ 3x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \ , \ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

Donc les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite (D) dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \quad , \ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}.$$

4. Soit (Γ_t) l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient
$x^2+y^2+z^2+4x+2(1-3t)y-2tz+10t^2-6t-4=0$.

a) Montrer que pour tout t réel,

$$x^2+y^2+z^2+4x+2(1-3t)y-2tz+10t^2-6t-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+\left[y+(1-3t)\right]^2-(1-3t)^2+(z-t)^2-t^2+10t^2-6t-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left[y+(1-3t)\right]^2+(z-t)^2-4-1+6t-9t^2-t^2+10t^2-6t-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left[y+(1-3t)\right]^2+(z-t)^2=9$$

Donc (Γ_t) est une sphère de rayon 3 et de centre $I_t(-2,-1+3t,t)$ situé sur la droite (D).

b) (Γ_t) est tangente au plan (ABC)

$$\Leftrightarrow d\left(I_t,(ABC)\right)=3 \Leftrightarrow \frac{\left|-4+1-3t+2t+2\right|}{\sqrt{4+1+4}}=3 \Leftrightarrow \frac{\left|-t-1\right|}{3}=3 \Leftrightarrow \left|t+1\right|=9 \Leftrightarrow t=8 \text{ ou } t=-10$$

Donc les sphères (Γ_8) et (Γ_{-10}) sont tangentes au plan (ABC).

c) Soit $\{J_1\}=\Gamma_8\cap(ABC)$ et Δ_1 la perpendiculaire au plan (ABC) passant par $I_{-8}(-2,23,8)$, on a : $\Delta_1\cap(ABC)=\{J_1\}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC) donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_1

Donc $\Delta_1 : \begin{cases} x=-2+2\alpha \\ y=23-\alpha \quad , \ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=8+2\alpha \end{cases}$ d'où $J_1(-2+2\alpha,23-\alpha,8+2\alpha)$.

$J_1\left(-2+2\alpha, 23-\alpha, 8+2\alpha\right) \in (ABC) \Leftrightarrow 2\left(-2+2\alpha\right)-\left(23-\alpha\right)+2\left(8+2\alpha\right)+3=0$

$\Leftrightarrow 9\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{8}{9}$

Par suite : $J_1\left(-\dfrac{2}{9}, \dfrac{199}{9}, \dfrac{56}{9}\right)$.

Soit $\left\{J_2\right\} = \Gamma_{-10} \cap (ABC)$ et Δ_2 la perpendiculaire au plan (ABC) passant par $I_{10}\left(-2,-31,-10\right)$, on a : $\Delta_2 \cap \left(ABC\right) = \left\{J_2\right\}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC) donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_2

Donc $\Delta_2 : \begin{cases} x = -2+2\beta \\ y = -31-\beta \\ z = -10+2\beta \end{cases}$, $\beta \in \mathbb{R}$ d'où $J_2\left(-2+2\beta, -31-\beta, -10+2\beta\right)$.

$J_2\left(-2+2\beta, -31-\beta, -10+2\beta\right) \in (ABC) \Leftrightarrow 2\left(-2+2\beta\right)-\left(-31-\beta\right)+2\left(-10+2\beta\right)+3=0$

$\Leftrightarrow 9\beta + 10 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\dfrac{10}{9}$

Par suite : $J_2\left(-\dfrac{38}{9}, -\dfrac{269}{9}, -\dfrac{110}{9}\right)$.