3ème Maths : M2
Durée : 2heures
Date : le 09 / 02 / 2009
Coefficient : 4

Devoir de contrôle N°2
Mathématiques

Lycée secondaire Teboulba — prof : Ghaddab Lassad

Exercice N°1 : (1,5 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,5 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$ alors :

a) (u_n) converge vers 0. **b)** (u_n) converge vers 3. **c)** (u_n) diverge.

2) On considère trois suites u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier n, $v_n \leq u_n \leq w_n$
Si l'on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors on peut déduire que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

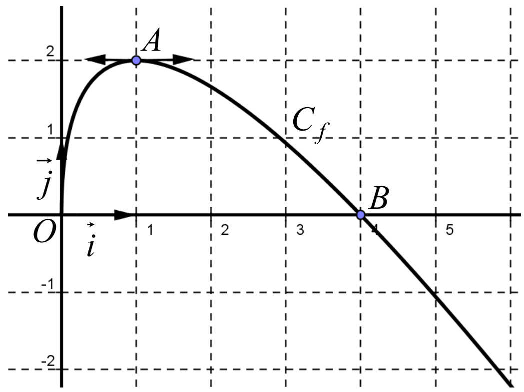
3) Soit la suite (u_n) définie et positive sur $\mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < \frac{1}{2}u_n$.

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. **b)** (u_n) est croissante **c)** (u_n) converge vers 0.

Exercice N°2 : (1,5 points)

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f **définie** et **dérivable** sur $]0,+\infty[$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On sait que :

- La courbe C_f admet au point $A(1,2)$ une tangente d'équation $y = 2$.
- La courbe C_f passe par le point $B(4,0)$.



1) a – Déterminer $f'(1)$.

b – Comparer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(2)$

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = [f(x)]^2$.

a – Exprimer $g'(x)$ en fonction de x.

b – Dresser le tableau de variation de g.

Exercice N°3: (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;0\right[$ par : $f(x)=\dfrac{ax^3+bx+c}{x}$. a, b et c trois réels non nuls.

Soit C_f sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ et que $f'(x)=\dfrac{2ax^3-c}{x^2}$

2) Déterminer les réels a, b et c sachant que :
   - ✓ La fonction f admet un extremum en $\dfrac{-1}{2}$.
   - ✓ La courbe C_f admet en -1 la tangente T dont une équation cartésienne $y=-7x-4$

3) On prend $f(x)=\dfrac{4x^3-2x-1}{x}$
   a – Dresser le tableau de variation de f sur $\left]-\infty;0\right[$
   b – En déduire la nature de l'extremum de f.

Exercice N°4 : (5 points)

Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, on donne les points :
$A(3\sqrt{3},3)$; $B(3\sqrt{3},-3)$ et $C(4\sqrt{3},0)$.

1) a – Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $dét(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})$. En déduire $Cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ et $Sin(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$.
   b – Déterminer alors la mesure principale de $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

2) a – Déterminer les coordonnées polaires de A .Placer alors les points A et B
   b – Déterminer les coordonnées polaires de B et C.
   c – En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

3) Déduire de ce que précède qu'il existe un cercle (C) passant par les points O, A, B et C.
   Tracer ce cercle en précisant les coordonnées de son centre.

Exercice N° 5: *(8 points)*

Soit la suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^{\ 2} + 1} \end{cases}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I –

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$.
2) a – Etudier la monotonie de la suite (u_n).
   b – En déduire que (u_n) est convergente.
3) a – Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n + \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} \times \left(u_n - \sqrt{2}\right)$

   b – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$

   c – En déduire que $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   d – Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

II –

1) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n^{\ 2} - 2$.
   a – Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.
   b – Exprimer v_n en fonction de n, et en déduire u_n en fonction de n.
   c – Retrouver la limite de (u_n).
2) On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^{\ 2}$.
   a – Calculer S_n en fonction de n.
   b – Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.