

EXERCICE N : 1 (6 points)

Déterminer la seule réponse correcte de chacune des propositions suivantes :

A) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin x}$.

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

2) a) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} g(x) = 0$

3) a) $g'(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)}$

b) $g'(x) = \operatorname{tg}(x)$

c) $g'(x) = -\operatorname{tg}(x)$

B) Soit M le point de coordonnées polaires (r, θ) et dont l'affixe est $\frac{i\sqrt{3}-1}{1-i}$. Alors θ est égal à :

a) $\frac{5\pi}{12}$

b) $\frac{11\pi}{12}$

c) $-\frac{\pi}{12}$

C) Soit n un entier relatif, le nombre $(1+i)^n$ est imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 4k$

b) $n = 4k + 2$

c) $n = 8k + 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

D) Si $|Z-i| = |Z+i|$ alors :

a) Z est imaginaire

b) Z est un réel

c) $Z = 0$

E) Soit la suite (U_n) définie et **positive** sur \mathbb{N} et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} < \frac{1}{3} U_n$, alors :

a) (U_n) est croissante sur \mathbb{N}

b) (U_n) est divergente

c) (U_n) est convergente

F) Soit la suite (S_n) définie \mathbb{N}^* par : $S_n = \frac{2}{n^2+1} + \frac{4}{n^2+1} + \frac{6}{n^2+1} + \dots + \frac{2n}{n^2+1}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$

a) 1

b) 0

c) $+\infty$



EXERCICE N : 2 (6 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante sur \mathbb{N} .

b) Dédurre que (U_n) est convergente .

3) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{1+U_n}{1-U_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = (V_n)^2$.

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 3^{2^n}$.

c) Exprimer U_n en fonction de n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE N : 3 (8 points)

A) On considère dans \square l'équation (E_θ) : $Z^2 + 4Z \cos(\theta) + 4 = 0$ où $\theta \in]0, \pi[$.

1) Sans résoudre l'équation (E_θ) , prouver que si a est une solution de (E_θ) alors \bar{a} l'est aussi .

2) On donne : $Z_1 = -2 \cos(\theta) + i 2 \sin(\theta)$ et $Z_2 = -2 \cos(\theta) - i 2 \sin(\theta)$.

a) Vérifier que Z_1 et Z_2 sont des solutions de (E_θ) .

b) Ecrire Z_1 , Z_2 et $\frac{Z_2}{Z_1}$ sous la forme trigonométrique .

c) Dédurre la valeur de θ pour laquelle le triangle OM_1M_2 est rectangle en O .

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prend pour la suite $\theta = \frac{\pi}{4}$

On considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_0 = 2$ et Z_1 et K le milieu du segment $[AB]$.

1) Ecrire Z_1 et Z_K sous forme cartésienne .

2) Ecrire Z_1 sous la forme trigonométrique .

3) Placer les points A , B et K .

4) a) Démontrer que le triangle OAB est isocèle .

b) Dédurre que $(\vec{u}, \overrightarrow{OK}) \equiv \frac{3\pi}{8} (2\pi)$.

c) Donner alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

