Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 2** *Mathématiques*	*Niveau : 3 ème Math*
Date : 07 / 03 / 2017	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 2 heures*

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x)=1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$.

On donne, sur la feuille annexe, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et déterminer $f'(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) $a/$ Montrer que l'équation: $f(x)=0$ admet dans $[1\,;+\infty[$ une solution unique α.

   $b/$ Vérifier que $2<\alpha<3$.

   $c/$ Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Montrer que la droite $\Delta : y=-\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

5) Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{4\sqrt{x^2-1}+2}{x}$.

   On désigne par Γ la représentation graphique de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la feuille annexe.

   $a/$ Etudier la dérivabilité de g à droite en 1.

   $b/$ Montrer que, pour tout $x\in]1\,;+\infty[$, $g'(x)=\frac{4f(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

   $c/$ Dresser le tableau de variations de g.

   $d/$ Vérifier que $g(\alpha)=\frac{10}{\alpha}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha\approx 2,25$.

   $e/$ Tracer la courbe Γ.

Exercice n°2 : (6 pts)

1) $a/$ Montrer que, pour tout réel x on a : $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ et que : $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

   $b/$ En déduire que, pour tout réel θ on a : $1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

   $c/$ On considère le nombre complexe $z=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Vérifier que : $z=1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$. En déduire la forme trigonométrique de z.

$d/$ Montrer alors que : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_A=1$, $z_1=1+\cos\theta+i\sin\theta$ et $z_2=3-\cos\theta-i\sin\theta$, où θ est un réel de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

$a/$ Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.

$b/$ Calculer $|z_1-1|$, en déduire que M_1 appartient à un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

$c/$ Construire les points M_1 et M_2 dans le cas où $\theta=\frac{\pi}{6}$.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $\theta\in[0\,;\,\pi]$ on a : $M_1M_2=4\sin\frac{\theta}{2}$.

$b/$ Déterminer la valeur de θ pour que $M_1M_2=2$.

Exercice n°3 : *(6 pts)*

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0=\frac{3}{2} \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{2}{U_n}\right) \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, on a : $U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{\left(U_n-\sqrt{2}\right)^2}{2U_n}$.

$b/$ Montrer, par récurrence, que, pour tout $n\in IN$, $U_n>\sqrt{2}$.

2) Montrer que la suite U est décroissante.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, on a : $U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n\in IN$, $U_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{2}\right)$.

$c/$ En déduire que, pour tout $n\in IN$, $U_n-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$d/$ Montrer alors qua la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Bonne chance

<u>*FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE*</u>

<u>Devoir de contrôle n°</u> 2 *(07 – 03 – 2017)*

Nom et prénom :…………………………………………………… *Classe : 3 ème Math*