2016/2017

LYCÉE CHEBBI

DEVOIR DE CONTRÔLE # 2

MATHÉMATIQUES

PR : SOLTANI MOHSEN

Le sujet comporte 2 pages numérotés de 1 à 2
Une copie non soignée sera sanctionnée.

Exercice 1 **(4 points)**

1. Soit la fonction $u(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.
   (a) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $u'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Dresser le tableau de variations de u .
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(1,0)$ et $M(x, \sqrt{x})$ ou $x \in \mathbb{R}+$
   Déterminer la valeur du réel x pour laquelle la distance AM soit minimale .

Exercice 2 **(6 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que le point $\Omega(1,2)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. On donne $J(0,1)$. Montrer qu'il existe une unique tangente T à $\mathscr{C}_f$ passant par J.
5. Construire T et $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3 **(5 points)**

a et b deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que $a \wedge b$ divise $(a + b) \wedge (ab)$.
2. On suppose dans cette question que : $(a + b) \wedge (ab) = p^2$ avec p premier .
   (a) Montrer que $p^2 \mid a^2$. #indication : $a^2 = a(a + b) - ab$#
   En déduire que $p \mid a$. Montrer de même que $p \mid b$
   (b) Démontrer que $a \wedge b = p$ ou p^2.
3. (a) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $(a + b) \wedge (ab) = 49$ et $a \vee b = 231$. Montrer que $a \wedge b = 7$
   (b) Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $(a + b) \wedge (ab) = 49$ et $a \vee b = 231$

Exercice 4 **(5 points)**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
Soit f l'application du plan $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ dans $\mathscr{P}$ qui , à tout point M du plan d'affixe $z\neq 0$, associe le point M' d'affixe z' défini par : $z'=z+i-\dfrac{1}{z}$.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $a=i$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et $c=-i$.
On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par f d'affixes respectives a' et b'.

1. (a) Montrer que C est l'unique point invariant par f.
   (b) Calculer a' et b'.
   (c) Montrer que $\dfrac{-b}{b'-b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$. En déduire la nature du triangle OBB'.
2. Soit $\Gamma=\{M\in\mathscr{P}\backslash\{O\}$ tel que $f(M)=O\}$
   (a) Résoudre $z^2+iz-1=0$
   (b) Déduire que les points de Γ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.