Lycée Menzel Jemil ,Le 05 décembre 2017

Classe : 3 ème Maths

Devoir de contrôle n°2

(en Mathématiques)

Durée de l'épreuve : 2 heures

Proposé par : Mme Mestoura Anissa

Exercice n°1 : (4,5 pts)

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$,la droite d'équations $y = x$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation: $y = 1$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$ et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale. La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points ,l'un d'eux est d'abscisse α .

Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique :

1) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

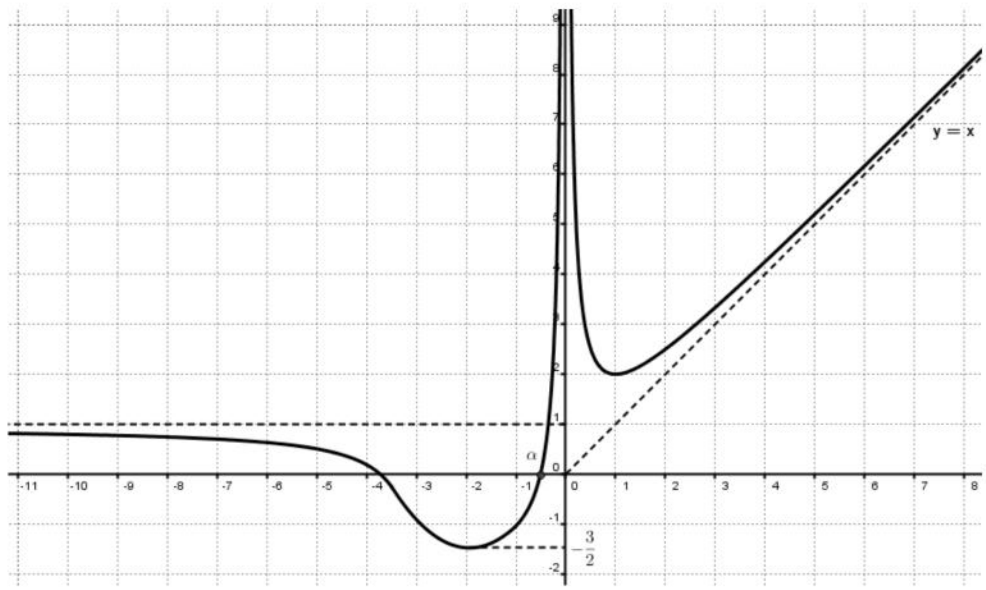
b) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$

d) $\lim\limits_{x\to\alpha^-} \frac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \frac{1}{f(x)}$

2) Déterminer :

$f(]-\infty,-1[)$, $f([1,+\infty[)$



Exercice n°2 : (5,5 pts)

I) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

1) déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir ce prolongement.

II) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \frac{x^2+3x}{x-1} & si\ x < 0 \end{cases}$

On désigne par ζ_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Montrer que g est continue en 0.

c) En déduire l'ensemble de continuité de g

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - \frac{2}{x}$

b) calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout $x < 0$, on a $g(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}$

b) En déduire que ζ_g admet une asymptote oblique D au voisinage de $-\infty$ dont on précisera l'équation.

Exercice n°3 : (5 pts)

I) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les points A et B de coordonnées cartésiennes $A(2, 0)$ et $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et le point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

1) a) Déterminer les coordonnées polaires de B.

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) Déterminer la nature exacte du quadrilatère $OACB$ puis en déduire que $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

3) Déterminer les coordonnées cartésiennes de C et en déduire que $OC = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

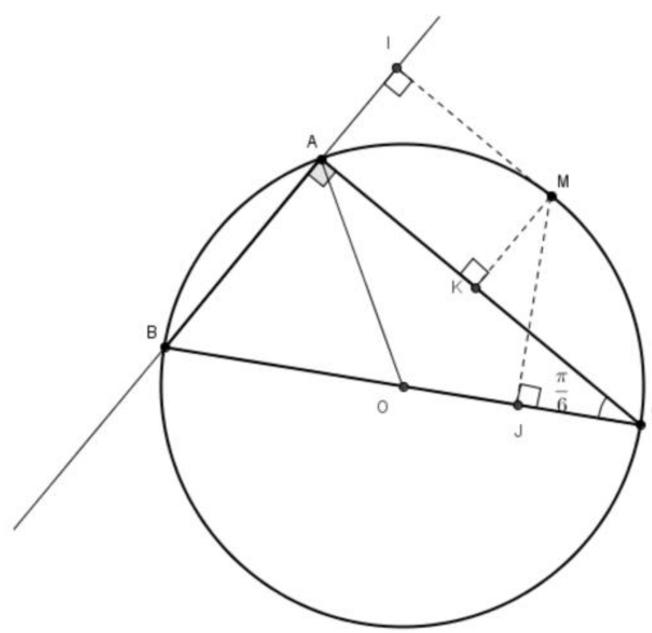
4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

II) Calculer :

$$A = \sin\left(\frac{13\pi}{18}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \quad \text{et} \quad B = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice n°4 : (5 pts)

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle en A inscrit dans un cercle ζ da centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ M est un point de ζ et I, J et K sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB), (BC) et (AC).



1) a)Donner la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

b) En déduire la nature du triangle OAB.

2) a) Montre que les points I, K, M et A appartiennent au même cercle que l'on déterminera.

b) En déduire que $2(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IK}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}})\ [2\pi]$

c) Montrer que $2(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IM}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BM}})\ [2\pi]$

d) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Bon travail ☺