

Exercice n°1: (8 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{2\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} & \text{si } x > 1 \text{ et } x \neq 2 \\ \sqrt{x^2 + 3} - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que f est continue en 1.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et donner une équation de la demi tangente T à (C_f) au point d'abscisse 1.

c) f est-elle dérivable en 1? Justifier.

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite $D: y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_f) et D dans $]1, +\infty[\setminus \{2\}$

5) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$ puis interpréter graphiquement le résultat

Exercice n°2: (5 points)

La courbe (C_f) ci contre est celle d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^* , elle admet :

* La droite $\Delta: y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

* La droite $D: y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

* La droite $D': x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f) .

* (T) est la tangente à (C_f) au point d'abscisse -1.



1) a) Calculer graphiquement les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x^2 + 3x - 2$$

b) Soit m un réel, discuter suivant les valeurs de m le résultat de la limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + mx^2 + 3x - 2$$

2) Dresser graphiquement le tableau de variation de f .

3) a) calculer $f(-1)$ et $f'(-1)$.

b) Donner une équation de la tangente (T)

4) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}/\{0,1\}$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$

a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

Exercice n°3: (7 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci dessous on considère BCD un triangle et tel que

$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. A est le projeté orthogonale de C sur [BD] et soit E le point du segment [AC] et tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) \equiv \frac{-83\pi}{6} [2\pi]$. Le triangle AFC est équilatéral.

H est le milieu du segment [CD].

1) a) Déterminer la mesure principal de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE})$.

b) Dédire que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

2) Montrer que les droites (EB) et (CD) sont perpendiculaires.

3) a) Vérifier que $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) \equiv (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FA}) [2\pi]$

b) Dédire que les points A,C,D et F appartient à un même cercle (C) que l'on précisera puis construire ce cercle.

c) Dédire l'ensemble des points M du plan vérifiant: $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

4) a) Donner une mesure de $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA})$

b) Dédire la nature du triangle DFA.

c) Dédire que [DC] est la bissectrice de $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA})$.

