

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L' EDUCATION ET DE LA FORMATION * * * * * DEVOIR DE SYNTHESE N : 1		LYCEE SECONDAIRE AJIM JERBA * * * * * B BRAHIM KHALED
EPREUVE : MATHEMATIQUES	COEFFICIENT : 4	NIVEAU ET SECTION : 3 ^e M
Premier trimestre	Date : 04 Décembre 2008	Durée : 2 heures

EXERCICE 1 (06 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

1) Questions de cours

a. (r, θ) est un couple de coordonnées polaires du point M dans un repère polaire (O, \vec{OI}) .

Que représentent les nombres r et θ ?

b. Un point M a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ dans (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) et pour coordonnées polaires (r, θ) dans (O, \vec{OI}) .

Exprimer r en fonction de x et de y.

Exprimer x et y en fonction de r et de θ .

2) Application

On donne le point A de coordonnées cartésiennes $(1; \sqrt{3})$.

a. Déterminer coordonnées polaires de A. Placer le point A dans le repère (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

b. Représenter dans le repère (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) , l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires (r, θ) vérifient :

$$(i) \begin{cases} r \in]0; 2] \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} r = 2 \\ \theta \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

3) Vrai ou faux

Pour chacune des quatre propositions, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

Aucune justification n'est demandée.

a. $(1, 2\pi)$ est un couple de coordonnées polaires du point I dans le repère $(O; \vec{OI})$.

b. Les points $I(1, 0)$, $I'(1, \pi)$, $M(r, 2\pi)$ repérés par leurs coordonnées polaires, sont alignés quelque soit le réel strictement positif r.

c. L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires (r, θ) vérifient $r = 1$ et $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ est l'arc orienté $[\widehat{JI}]$.

d. Dans le repère $(O; \vec{OI})$, les points de coordonnées polaires $(2, \frac{\pi}{3})$ et $(2, \frac{5\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à la droite (OI).

EXERCICE 2 (08 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1+x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
c. Montrer que la droite d'équation cartésienne $y = -x - 1$ est une asymptote à (C).
2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
3. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0. Conclure.
b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
c. Soit x un réel non nul. Calculer $f'(x)$.
4. Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

EXERCICE 3 (06 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. a. Montrer que l'équation $[E_1]: f(x) = 0$ admet exactement trois racines dans \mathbb{R} .
b. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x .
3. On cherche les solutions de l'équation $[E_1]$ sous la forme $x = 2\cos(\theta)$ (avec θ un réel).
a. Montrer l'égalité suivante : $4\cos^3(\theta) = 3\cos(\theta) + \cos(3\theta)$
b. Démontrer que x solution de $[E_1]$ si, et seulement si, $2\cos(3\theta) = 1$ $[E_2]$.
c. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $[E_2]$.
d. En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $[E_1]$.

