3ème Maths : M2
Durée : 2heures
Date : le 13 / 12 / 2008
Coefficient : 4

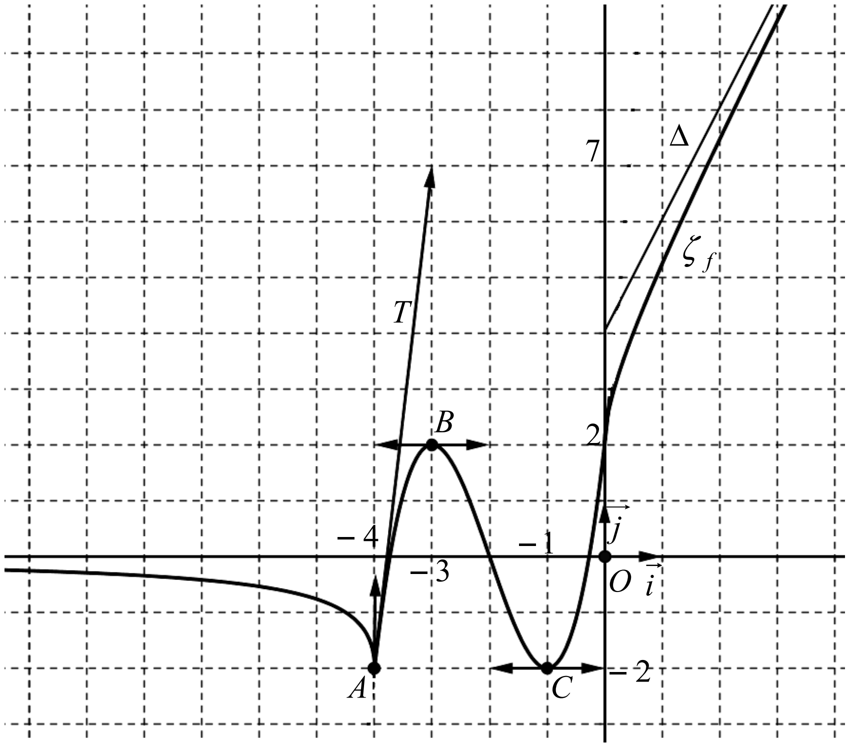
Devoir de Synthèse N°1
Mathématiques

Lycée secondaire Teboulba — prof : Ghaddab Lassad

Exercice 1 : *(4 points)* $(1+0,5+0,5+0,25+0,25+0,75+0,75)$

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur IR. On sait que :

- La droite Δ d'équation $y=2x+4$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.
- La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe C_f en $-\infty$.
- La courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points $B(-3,2)$ et $C(-1,-2)$.
- La courbe C_f admet une demi tangente T et une demi tangente verticale au point $A(-4,-2)$.



À partir du graphique et des renseignements fournis :

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-2x]$; .

2) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(-3)$.

3) $a-$ Déterminer $f_d'(-4)$.

$b-f$ est elle dérivable à gauche en -4 ? Justifier.

$c-$ Déterminer $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}$.

4) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=x^2 f(x)$.

$a-$ Montrer que $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=4$.

$b-$ Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1.

Exercice 2 : (8 points) $(I - 0{,}5 + 0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}5 + 0{,}5)$
$(II - 0{,}5 + 0{,}75 + 0{,}75 + 1 + 1 + 1)$

I – Soit la fonction h définie sur $]-\infty,-4] \cup [0,+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x} + x + 2$.
C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
3) a – Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a $h(x) - 2x = \dfrac{8 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 - \frac{2}{x}}$.

   b – En déduire que la courbe C_h admet une asymptote Δ d'équation $y = 2x + 4$.

   c – Pour $x \in]0;+\infty[$, comparer $\sqrt{x^2 + 4x}$ et $(x + 2)$ puis étudier la position relative sur $]0;+\infty[$ de C_h et Δ.

II – On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x} + x + 2 & \text{si } x \in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[\\ x^3 + 6x^2 + 9x + 2 & \text{si } x \in [-4,0] \end{cases}.$$

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 0.
2) a – Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.
   b – Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f_g'(0)$.
3) a – Montrer que f est dérivable en tout réel a de $]0;+\infty[$ et que $f'(a) = \dfrac{a+2}{\sqrt{a^2 + 4a}} + 1$

   b – Déterminer le réel a tel que la tangente T à C_f au point d'abscisse a soit parallèle à la droite $D : y = (\sqrt{2} + 1)x - 1$.

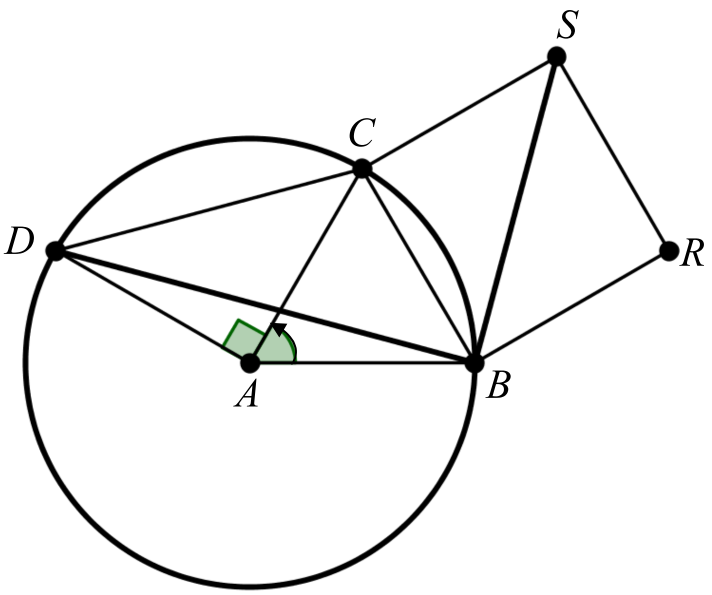
   c – Soit le deux points $A(0,1)$ et $B(m,\sqrt{2})$ où m un paramètre réel.
   Déterminer m pour que la droite (AB) soit perpendiculaire à T.

Exercice 3 : *(5 points)* $(1+1+0{,}5+1+1{,}5)$

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un cercle ζ de centre A et de rayon 4.

Soient B, C et D trois points de ζ tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On considère le carré $BRSC$. (Voir figure ci-dessous)



1) a – Déterminer une mesure de chacun des angles orientés : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BA}\right)$.

   b – Calculer $dét\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$.

2) a – Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right)$.

   b – En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$

3) Déduire de ce qui précède que $(BS) \perp (DB)$.

Nom : …………………………….. Prénom : …………………………………………… N° :……

<u>Exercice QCM :</u> (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Cocher alors la bonne réponse :

1) Soit θ la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est $\frac{-35\pi}{3}$

a) $\theta = \frac{-5\pi}{3}$ ☐ b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ ☐ c) $\theta = \frac{-2\pi}{3}$ ☐

2) Soit quatre vecteurs $\vec{t}, \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{t},\vec{u}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$; $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $(\vec{w},\vec{v}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

a) $\vec{t}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ☐

b) $\vec{t}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires ☐

c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ☐

3) Soit f une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ telle que : $f(x) = -2\sqrt{x+1}$ et $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x+1}}$

Alors une approximation affine de : $-2\sqrt{4{,}0001}$ est :

a) $-4{,}00005$ ☐

b) $4{,}00005$ ☐

c) $-3{,}00005$ ☐