REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L' EDUCATION ET DE LA FORMATION ❄❄❄❄ **DEVOIR DE SYNTHESE N : 1**		LYCEE SECONDAIRE **AJIM** JERBA ⌖⌖⌖ B BRAHIM KHALED
EPREUVE : MATHEMATIQUES	COEFFICIENT : 4	NIVEAU ET SECTION : 3^e M
Premier trimestre	Date : 07 décembre 2009	Durée : 2 heures

EXERCICE 1 (04 points)

Soit a, b, p et q quatre réels tels que $p = a + b$ et $q = a - b$.

1) L'objet de cette question est de factoriser l'expression $\cos(p) + \cos(q)$.
   On supposera connus le résultat suivant : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   a. Vérifier que $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
   b. Exprimer a et b en fonction de p et q.
   c. Factoriser alors l'expression $\cos(p) + \cos(q)$.
2) Application de la formule :
   Résoudre dans IR l'équation $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

EXERCICE 2 (05 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1) Questions de cours
   Un point M a pour coordonnées cartésiennes (x; y) dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et pour coordonnées polaires $[r,\theta]$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OI})$.
   a. Calculer $\cos(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ et $\sin(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.
   b. Démontrer que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$.
2) On considère l'ensemble E des points M du plan dont les coordonnées polaires $[r,\theta]$ vérifient $r = 2\sin(\theta)$ avec $\theta \in]0; \pi[$.
   a. Montrer qu'un point M de E a pour coordonnées cartésiennes $(\sin 2\theta; 1 - \cos 2\theta)$.
   b. En déduire que E est contenu dans un cercle que l'on caractérisera.
3) On note (C) le cercle de centre I(0;1) et de rayon 1.
   N est un point de (C), distinct de O, de coordonnées cartésiennes (x; y) et de coordonnées polaires $[r,\theta]$.
   a. Justifier que l'on peut choisir $\theta \in]0; \pi[$.
   b. Démontrer que $r(r - 2\sin(\theta)) = 0$.
   c. En déduire que N est un point de E.
4) Déterminer l'ensemble E.

EXERCICE 3 (04 points)

Soit m un paramètre réel.

On considère la fonction f_m définie sur IR par : $f_m(x) = mx^2 - 2x + 1$.

On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

1) Etudier, suivant les valeurs du paramètre réel m, le sens de variation de la fonction f.
2) Dans la suite en prend $m \neq 0$.
   a. Vérifier que le point $S_m\left(\frac{1}{m}; 1 - \frac{1}{m}\right)$ est le sommet de la courbe (C_m).
   b. En déduire que quand m varie dans IR*, S_m décrit la droite D d'équation $x + y - 1 = 0$. .
3) a. Montrer que (C_m) passe par un seul point fixe A dont on précisera les coordonnées.
   b. Prouver que pour tout réel non nul m, (C_m) coupe D en deux points A et S_m.

EXERCICE 4 (07 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

On considère une fonction f définie sur IR et dérivable sue IR*.

On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			‖ -3		
$f(x)$	↗	-2 ↘	‖ -1 ↘	-3 ↗	

On admet que :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0.$
- $f(x) < x$ pour tout réel x de $]-\infty;0[$.
- La courbe représentative de f possède une asymptote à gauche au point d'abscisse 0.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty.$

Partie A

1) Recopier et compléter le tableau de variations de f.
2) Préciser les extremums locaux de f.
3) a. Interpréter graphiquement les résultats obtenus dans ce tableau.
   b. Tracer une courbe possible représentant f.
4) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR.
   b. Préciser le signe de f(x) suivant les valeurs du réel x.

Partie B

On suppose qu'il existe cinq réels a, b, c, d, e tels que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + b}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ cx^3 + dx + e & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Expliciter la fonction dérivée de f.
2. A l'aide du tableau de variation de f déterminer les réels a, b, c, d, e.

Bon travail

et

bonne chance