Lycée Ali BOURGUIBA Bembla Monastir	**DEVOIR DE SYNTHÈSE N° : 01**	*3 Math 1 et2* *2h* *07/12/2009* *Chortani @Yacoubi*

Exercice 1(4 points)

I) **QCM**

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tel que $\alpha=\dfrac{47\pi}{3}$ soit une mesure de l'angle orientée $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ alors la mesure principale de l'angle orientée $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est :

a) $\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\dfrac{-\pi}{3}$ c) $\dfrac{-2\pi}{3}$

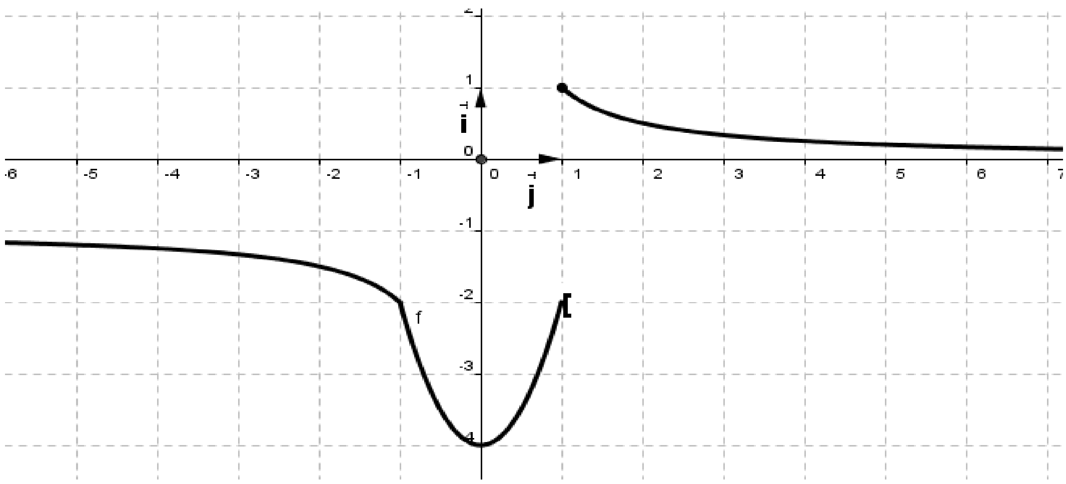
2) si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est une base orthonormée indirect

a) $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}})$ est une base orthonormée indirect

b) $(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}})$ est une base orthonormée direct

c) $(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}})$ est une base orthonormée indirect

II) Vrai Ou Faux



a) f est continue en 2

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

c) $|f|$ est continue en 1

d) $f([-6,7])=[-4,1]$

Exercice 2

I) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{4+2x^2}-2}{x}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement.

3)a) Montrer que f est une fonction impaire

b)Montrer que f est majoré sur $]0\,;+\infty[$ par $\sqrt{2}$ en déduire que f minoré sur $]-\infty\,;0[$ par $-\sqrt{2}$

II) Soit la fonction g définie sur IR par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+4}+2} & \text{si } x \leq 0 \\ g(x)=x^4-2x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de g sur IR .

2) Etudier le variation de g sur $]0\,;1]$ puis sur $[1\,;+\infty[$

3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique solution $\alpha\in]1;2[$.

b) Vérifier que $g(-\alpha)=\dfrac{2-\alpha^2}{\alpha}$

Exercice 3

Dans un plan apporté a un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(3 ;0) ;B(3 ;1) et C(3 ;4).On désigne par D le projeté orthogonal de C sur (OB)

1) a)Calculer $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$

b)En déduire alors BD

c)Calculer cos $(\widehat{OBC})$

2)a)Calculer $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ (On pourra remarquer que $\widehat{ABD}=\widehat{OBC}$

b) Soit (x, y) les coordonnées de D ,en calculant $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ en fonction de x et y deduire les coordonnées de D dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Exercice 4

Le plan $\wp$ est orienté dans le sens direct .On considère un triangle ABC isocèle en A tel que

BC =8 et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ (voir figure)

1) Donner la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$ et celle de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

2) Soit φ le cercle circonscrit au tringle ABC

On considère les ensembles suivant :

$\varphi_1=\left\{M \in \wp \text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$

et $\varphi_2=\left\{M \in \wp \text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$

a)Vérifier que A∈ φ_1 en déduire alors l'ensemble φ_1 puis l'ensemble φ_2

b) Soit D un point de l'arc orienter $\overset{\frown}{BC}\setminus\{B, C\}$.On désigne par H le projeté orthogonal de D sur (BC) et K le projeté orthogonal de D sur (AC)

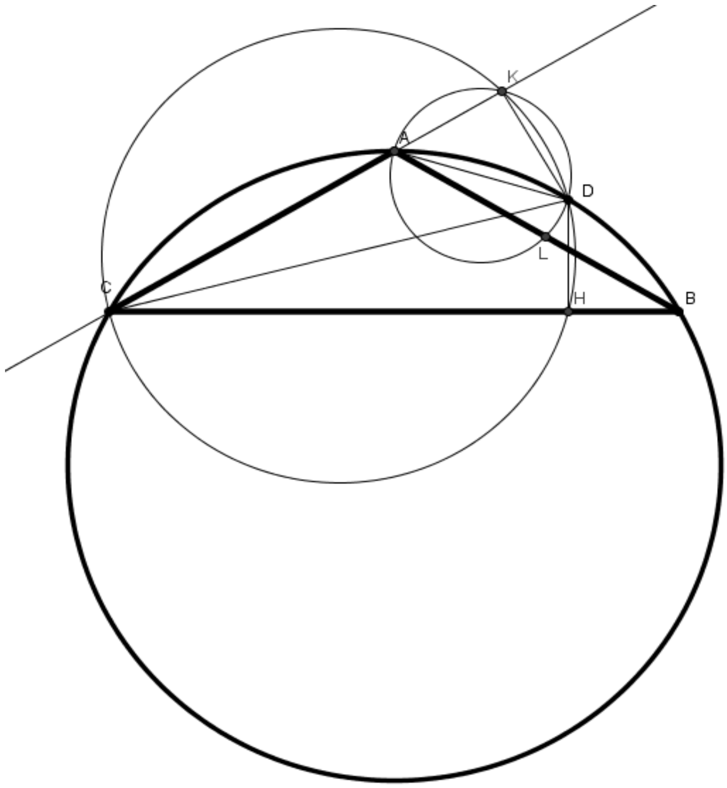
Montrer que H ,K ,C et D appartiennent a un même cercle que l'on déterminera

c)Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)$ [2π] puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ [2π]

3) Soit φ' le cercle de diamètre [AD] ; φ' recoupe [AB] en un point L

a)Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{KD},\overrightarrow{KL}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)$ [2π]

b) Montrer que les points H,K et L sont alignées



Exercice 1

I) QCM 1)b 2) C

II) Vrais ou Faux a) Vrais b) Faux c) Faux d) Faux

Exercice 2

I) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{4+2x^2}-2}{x}$

1) a) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

b) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

$x \mapsto 4+2x^2$ Polynôme (positive) Continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}^*$.

$x \mapsto \sqrt{4+2x^2}$ -2 Continue sur $\mathbb{R}^*$.

$x \mapsto x$ Continue sur $\mathbb{R}$ (non nulle sur $\mathbb{R}^*$)

Donc f continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$2)\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+2x^2}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+2x^2}-2\right)\left(\sqrt{4+2x^2}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+2x^2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{4+2x^2}+2}=0$$

Donc f prolongeable par continuité en 0 et son prolongement la fonction h définie par :

h(x)= $f(x)$ si $x \neq 0$ et h(0)=0.

3)a) * $x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^*$

$$** \; f(-x)=\frac{\sqrt{4+(-x)^2}-2}{-x}=-\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}=-f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

b)*Si $x \in]\,0\,;+\infty\,[$

$$f(x)-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{4+2x^2}-2-\sqrt{2}x}{x}=\frac{\left[\sqrt{4+2x^2}-(2+\sqrt{2}x)\right]\left[\sqrt{4+2x^2}+(2+\sqrt{2}x)\right]}{x\left(\sqrt{4+2x^2}+2+\sqrt{2}x\right)}$$

$$=\frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{4+2x^2}+2+\sqrt{2}x}\prec 0$$

Donc que f est majorée sur$]0\,;+\infty\,[$par $\sqrt{2}$

*Si $x\in]-\infty;0[$on a :$-x\in]\,0\,;+\infty\,[$Donc

$$f(-x)\prec\sqrt{2}\Leftrightarrow -f(x)\prec\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)\succ-\sqrt{2}$$

Donc que f est minorée sur$]-\infty\,;0[$par $-\sqrt{2}$

II) Soit la fonction g définie sur IR par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+4}+2} & \text{si } x\leq 0\\ g(x)=x^4-2x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$

1)$x\mapsto\dfrac{2x}{\sqrt{4+x^2}+2}=h(x)$ (le prolongement de f, (I-2))Continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur$]-\infty,0]$

$x\mapsto x^4-2x^2$ polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^4-2x^2)=0=g(0)$$

Donc g continue sur $\mathbb{R}$

2) g(x)=x^4-2x^2=$(x^2-1)^2-1$
*Variation de g sur$]0\,;1]$
Soient a et b $\in]0\,;1]$

$$a\prec b\Leftrightarrow a^2\prec b^2\Leftrightarrow a^2-1\prec b^2-1\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)^2\succ\left(b^2-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)^2-1\succ\left(b^2-1\right)^2-1$$

Donc f strictement décroissante sur$]0\,;1]$
*Variation de g sur $[1\,;+\infty\,[$
Soient a et $b\in[1\,;+\infty\,[$

$$a\prec b\Leftrightarrow a^2\prec b^2\Leftrightarrow a^2-1\prec b^2-1\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)^2\prec\left(b^2-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)^2-1\prec\left(b^2-1\right)^2-1$$

Donc f Strictement croissante sur $[1\,;+\infty\,[$
a) g continue strictement croissante sur]1;2[.
g(1)=-1<4 et g(2)=8>4

donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique solution α∈]1;2[.

b) α>0 donc −α<0 d'ou

$$g(-\alpha)=\frac{\sqrt{4+\alpha^2}-2}{-\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^4}-2}{-\alpha}=\frac{2-\alpha^2}{\alpha}$$

Exercice 3

$$1)a)\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=-3\times0+(-1)\times3=-3$$

$$b)\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=BO\times BC\times\cos(\widehat{OBC})$$

$$\Rightarrow\cos(\widehat{OBC})=\frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{BO\times BC}=\frac{-3}{\sqrt{10}\times\sqrt{9}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$c)\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ car D est le projeté orthogonal de C sur (OB)

donc $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=-3$

$$donc-\sqrt{10}BD=-3\Rightarrow BD=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$2)a)\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=-3$ d'après 1)c)

Ou bien $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}=BO\times BD\times\cos(\widehat{OBD})=\sqrt{10}\times\frac{3}{\sqrt{10}}\times\cos(\Pi)=-3$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=BA\times BD\times\cos(\widehat{ABD})$ (car $\widehat{ABD}=\widehat{BOC}$)

$=1\times\frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{10}$,Car BA=1

b) $D(x,y)$

$$\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix};\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}=-3(x-3)-1(y-1)=-3x-y+10$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=0(x-3)-1(y-1)=-y+1$$

$\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}=-3\\\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\frac{-3}{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x-y+10=-3\\-y+1=\frac{-3}{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{117}{30}\\y=\frac{13}{10}\end{cases}$$

Exercice 4

ABC tringle isocèle en A , $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) \equiv -\frac{\Pi}{6}[2\Pi]$

1) On a ABC tringle isocèle en A donc

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)[2\Pi]$

$\equiv -\frac{\Pi}{6}[2\Pi]$

De même on a $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = \Pi$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \Pi - (\widehat{BCA} + \widehat{ABC}) = \Pi - (\frac{\Pi}{6} + \frac{\Pi}{6}) = \frac{2\Pi}{3}$

On respectant le sens on a : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{2\Pi}{3}[2\Pi]$

2) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{2\Pi}{3}[2\Pi] \Rightarrow A \in \varphi_1$

$M \in \varphi_1$, $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv -\frac{2\Pi}{3}[2\Pi] \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\Pi]$

comme A, B et C ne sont pas aligné, on déduit que M d'écrit l'arc d'extrémités B et C contenant A de cercle circonscrit au triangle ABC, privé de B et C

ou bien $M \in \overset{\frown}{CB} \setminus \{B,C\}$

$\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\Pi}{3}[2\Pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \left(\pi + \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right)[2\pi]$

* $M \in \overset{\frown}{BC} \setminus \{B,C\}$

b) On a HDC est un triangle rectangle en H donc $H \in \varphi_{[DC]}$

de même KDC est un triangle rectangle en K donc $K \in \varphi_{[DC]}$

alors les points C, D, H et K appartiennent au même cercle de diamètre [DC]

c) On a C, D ,K et H $\in \varphi_{[DC]} \Rightarrow \left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi](1)$

(Car K et C appartiennent au même arc $\overset{\frown}{HD}$) or $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaire et de même sens donc $\Rightarrow \left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi](2)$

$\overset{(1)et(2)}{\Rightarrow} \left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$

Comme $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$ car A,B,C et D appartiennent au même cercle φ et C et A ∈ $\overset{\frown}{BD}$ alors $\left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$

3) φ' $_{[AD]}$ coupe (AB) en L

a) on a $\left(\overrightarrow{KD},\overrightarrow{KL}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AL}\right)[2\pi]$ car K,A,D et L ∈ φ' $_{[AD]}$

or $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaire de même sens donc $\left(\overrightarrow{KD},\overrightarrow{KL}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$

b)On a $\left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KL}\right) \equiv \left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KD}\right) + \left(\overrightarrow{KD},\overrightarrow{KL}\right)[2\pi]$

$$\equiv \underbrace{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)}_{2-c)} + \underbrace{\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)}_{3-a)}[2\pi]$$

$\equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi] \equiv 0[2\pi]$ Donc K,H et L sont alignés