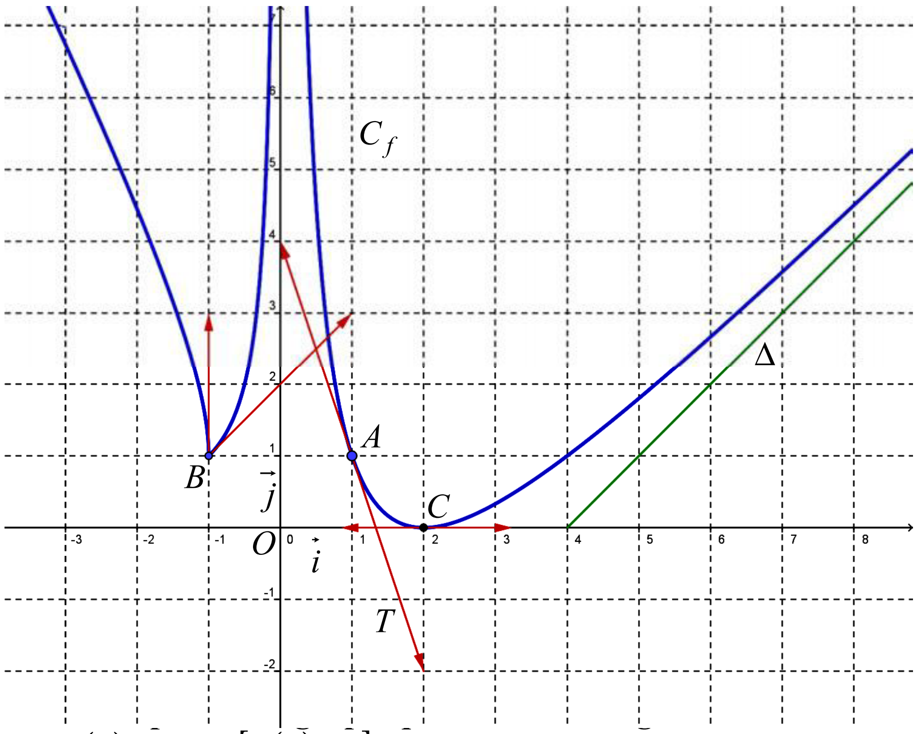
Mathématiques	Devoir de Synthèse N° 1	
3ème Maths : M2 Date : le 12 / 12 / 2009	Durée : 2heures Coefficient : 4	Enseignant : M. Ghaddab Lassad

Exercice N°1 : 4 points

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. On sait que :

- La droite Δ d'équation $y = x - 4$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.
- La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C_f.
- La droite T est la tangente à C_f au point A.
- La courbe C_f admet deux demi tangentes au point B et une tangente horizontale au point C.



1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$.

2) Déterminer $f'(2)$, $f'(1)$ et $f_d'(-1)$. Donner une approximation affine du réel $f(0{,}998)$

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x)-1}{x+1}$.

4) Soit g la fonction définie sur $]0,2[$ par : $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$.

a – Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \dfrac{-1}{2}$.

b – Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

Exercice N° 2: 9 *points*

I – Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $h(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; et C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a – Vérifier que : $h(x)=x-4+\dfrac{6}{x+1}$.

   b – En déduire que la courbe C_h admet une asymptote Δ dont on déterminera une équation cartésienne.

   c – Etudier la position relative de C_h par rapport à Δ.

2) Soit $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

   a – Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $x\neq a$, $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}=\dfrac{ax+x+a-5}{(x+1)(a+1)}$

   b – En déduire que h est dérivable en a et que $h'(a)=1-\dfrac{6}{(a+1)^2}$.

3) Soit A et B deux points distincts de la courbe C_h d'abscisses respectives α et β.

   a – Déterminer une relation entre α et β pour que les tangentes en A et B soient parallèles.

   b – Déterminer α et β sachant de plus que la tangente à C_h en A passe par le point $I(2,-2)$.

   c – On suppose dans cette question que $A(1,0)$ et $B\left(\dfrac{11}{4},\dfrac{7}{20}\right)$.

   Existe –il des tangentes à la courbe C_h perpendiculaire à la droite (AB) ? si oui préciser les coordonnées de leurs points de contacts avec C_h.

II – Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=h(x) & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{-1}{x} & \text{si } x\in\left]-1,0\right[\\ f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}-x & \text{si } x\leq -1 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x]$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

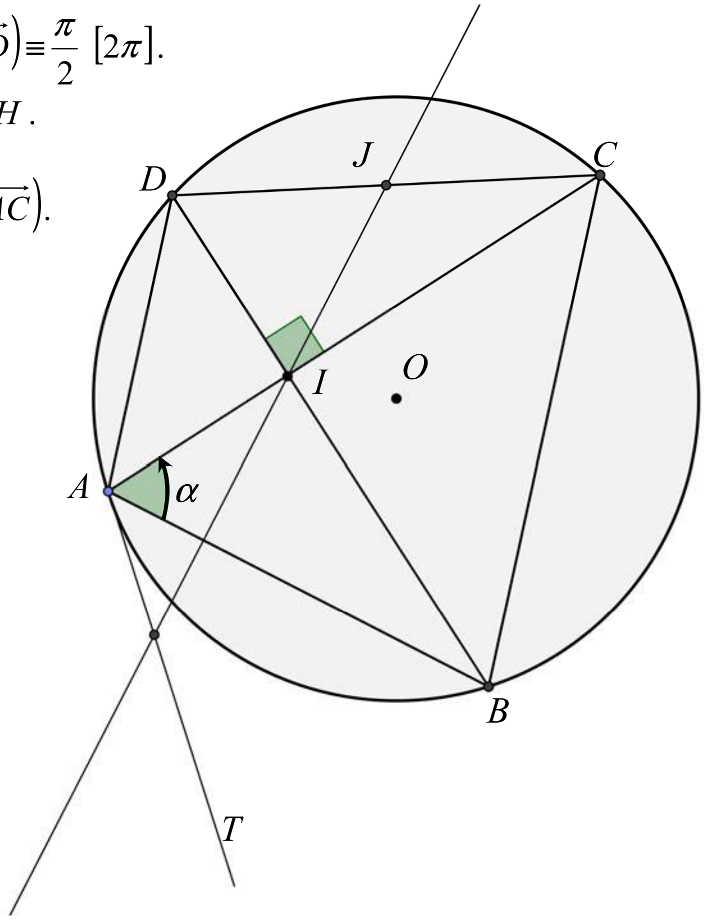
3) a – Montrer que f est continue en (-1).

   b – Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-1). Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice N°3 : 7 points

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle ζ de centre O dont les diagonales se coupent en I et vérifient : $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

J est le milieu de $[CD]$ et (IJ) coupe (AB) en H.



On note α la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

$(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z})$

I –

1) Prouver que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ}}\right)\equiv\alpha+\left(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IJ}}\right)\ [2\pi]$.
2) a – Exprimer $\left(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DJ}\right)$ en fonction de α.
   b – Montrer que le triangle DIJ est isocèle.
   c – En déduire $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IJ}\right)$ en fonction de α.
3) Montrer que $(AB)\perp(IJ)$

II – Soit $[AT)$ tangente à ζ en A.

On suppose que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

La droite (IJ) coupe (AO) en F et $[AT)$ en E.

1) a – Prouver que AEF est isocèle. (utiliser les angles orientés)
   b – Exprimer $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AI}\right)$ en fonction de α.
   c – On suppose que $AE=2$. Montrer que : $d\acute{e}t\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AI}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{Cos(\alpha)}\times Cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$
2) Soit l'ensemble $\xi=\left\{M\in P \text{ tels que } \left(\widehat{\overrightarrow{HM},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$

   Déterminer l'ensemble ξ.