Devoir de synthèse N° 01

Epreuve : MATHEMATIQUES

Exercice N° 01 (3 points)

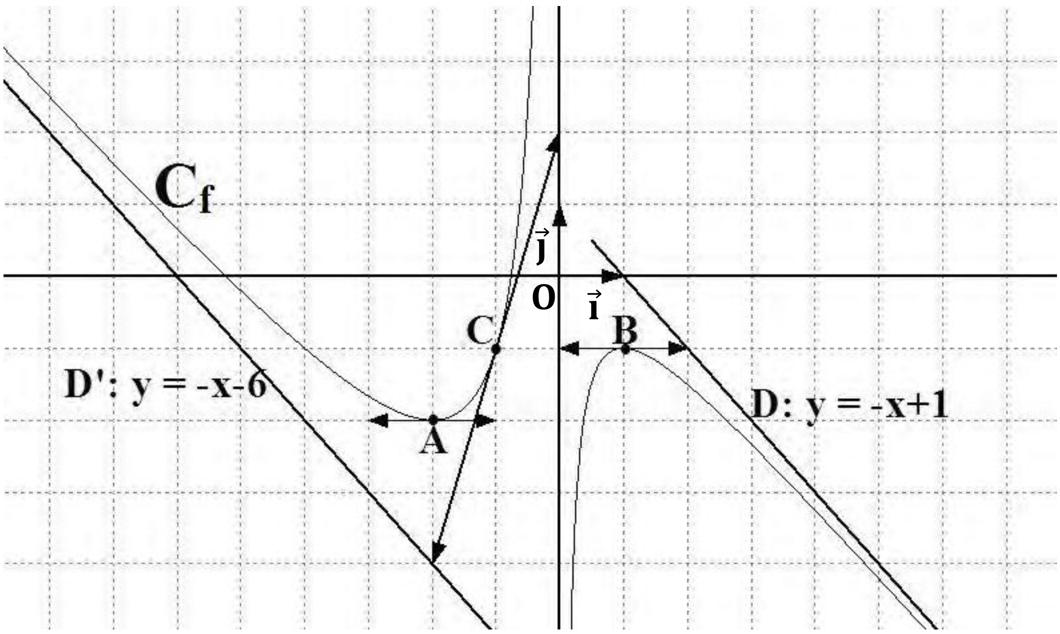
Répondre par **« vrai »** ou **« faux »**. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle direct en A. on a : $\text{dét}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right) = -AC^2$.
2) Soit A et B deux points distincts du plan et $I = A * B$.
   Pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
3) Si f est dérivable à droite et à gauche en a alors f est dérivable en a.
4) Si f est une fonction impaire dérivable en 2 et $f'(2) = 1$ alors f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 1$.

Exercice N° 02 (4 points)

Dans la figure ci-dessous :

- ✓ C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR^*,dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- ✓ C_f admet trois tangentes aux points A ; B et C.
- ✓ La droite $D: y = -x + 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$
- ✓ La droite $D': y = -x - 6$ est une asymptote oblique à $\mathbf{C_f}$ au voisinage de $-\infty$
- ✓ La droite de ordonnées est une asymptote verticale à $\mathbf{C_f}$



1) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{0^+} f(x)$et $\lim\limits_{-\infty}[f(x) + x]$
2) a) Déterminer $f(-1)$; $f'(-2)$; $f'(-1)$ et $f'(1)$
   b) En utilisant $f'(-1)$, estimer $f(-0.995)$,
3) Déterminer $\lim\limits_{-1} \frac{xf(x)-1}{x+1}$.
4) Discuter suivant le réel m, le nombre des solutions de l'équation, $f(x) = -x + m$.

Exercice N° 03 (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR, par $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$

1) a) Montrer que pour tout $x \in IR$ on a : $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + f(x) = 0$

   b) Calculer $f(\frac{\pi}{8})$ puis déduire $f(\frac{5\pi}{8})$

2) a) Montrer que pour tout $x \in IR$, $f(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$

   b) En déduire que pour tout $x \in IR$, $f(x) = -2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$

   c) Résoudre dans IR puis dans $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 0$

3) Soit la fonction g : $[0; \pi] \longrightarrow IR$

$$x \longmapsto \frac{1-\cos(2x-\frac{\pi}{6})}{f(x)}$$

   a) Déterminer l'ensemble de définition D_g, de la fonction g.

   b) Montrer que pour tout $x \in D_g$, $g(x) = -\frac{1}{2}\tan(x - \frac{\pi}{12})$

   c) Calculer $g(0)$ puis déduire que $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

Exercice N°04 (7 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x - \frac{3}{2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2-x-2}{1-x} & \text{si } x \in [-1; 0] \\ \sqrt{x^2+4} - x - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Etudier la continuité de f en -1 et en 0

   b) En déduire l'ensemble de continuité de la fonction f.

2) Montrer que la droite $D : y = -4$ est une asymptote horizontale à ξ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que la fonction f est dérivable en -1

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner les équations des demi-tangentes à ξ au point $A(0, -2)$

4) Soit $x_0 \in]-\infty; -1[$.

   a) Montrer que f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$

   b) Ecrire une équation de la tangente Δ à ξ au point d'abscisse -2

   c) Déterminer le réel $x_0 \in]-\infty; -1[$ tel que la tangente à ξ au point d'abscisse x_0 soit perpendiculaire à la droite $D' : y = x$