L. Ali Bourguiba K.K	Classe : $3M_1$ Durée : 120 mn
Prof : Abdesslem Raoudha Le 6/12/2011	**DEVOIR DE SYNTHESE N1**

Exercice 1 : (3 points) : Cocher les bonnes réponses

1) Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$, on a

a) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$ b) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$ c) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{3\pi}{5}\ [2\pi]$

2)Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{3024\pi}{4}\ [2\pi]$, la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est

a) π b) 0 c) $\frac{\pi}{4}$

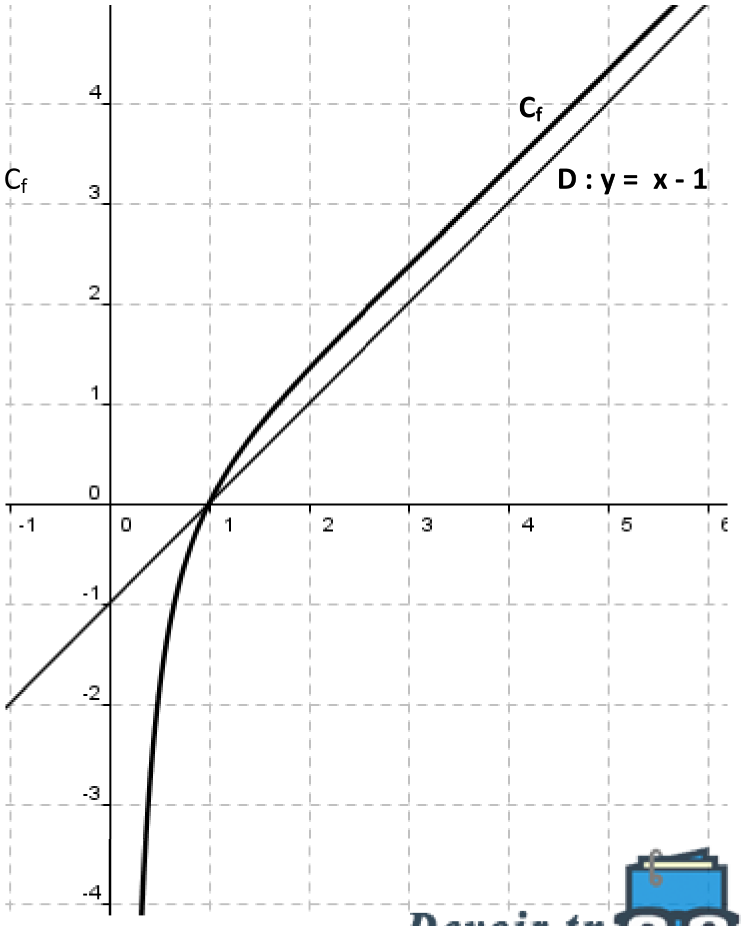
3)soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{7\pi}{3}\ [2\pi]$, une autre mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

a) $\frac{-23\pi}{3}$ b) $\frac{13\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$

4)soit A , B et C trois points distincts tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \alpha\ [2\pi]$, on a :

a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \equiv -\alpha\ [2\pi]$ b) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi + \alpha\ [2\pi]$ c) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

Exercice 2 : (4 points)



La courbe à côté est celle d'une fonction f définie su IR*+

Les droites D : y = x - 1 et D' : x = 0 sont asymptotes à C_f

Soit g (x) = f (x) – (x – 1)

1)Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2)Déterminer : $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x)}$

3)Déterminer l $\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{f(x)}$ et $\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{f(x)}$

Exercice 3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR \ {1} par
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+3} + x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \dfrac{x^3+x^2+3x+3}{x^2-1} & \text{si } x > -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1)a)Développer $(x+1)(x^2+3)$

b)Montrer que f est continue en - 1

2)a)montrer que pour tout $x \leq -1$, $on\ a\ f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x} + 1$

b) Déterminer la limite de f en -∞ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3)a)calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b)montrer que pour tout $x > -1$ et $x \neq -1$, $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$

c)Montrer que la droite D : y = x + 1 est une asymptote à C au voisinage de + ∞

d)Déterminer la position de C et D

Exercice 4 : (7 points)

Soit B et C deux points distincts du plan orienté et E = { M tel que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ }

1)Construire E

2)Soit A ∈ E et tel que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{-3\pi}{8}\ [2\pi]$

a)Construire A

b)Montrer que le triangle ABC est isocèle

3)Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre et soit A' le symétrique de A par rapport à O

Déterminer $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB})$

4)Soit M ∈ $\Gamma \setminus \{A, B, C\}$, Δ la perpendiculaire à (AM) passant par C et { I } = $\Delta \cap (BM)$

Montrer que $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'})\ [\pi]$ et déduire que $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi]$

5)Soit J un point du cercle de centre A et de rayon AB privé de B et C

Montrer que les points I , J , B et C appartiennent à un même cercle

Correction

Exercice 1 :

1)b) 2)b) 3)a et b 4)b et c

Exercice 2 : 1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) + 1 = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} + \frac{x-1}{x} = 1$

2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

3) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{f(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ $\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{f(x)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Exercice 3 :

1) a) $(x+1)(x^2+3) = x^3 + x^2 + 3x + 3$

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x^2+3} + x + 1 = 2 = f(-1)$ et

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = -2 \neq f(-1)$

donc f n'est pas continue en - 1

2)a) $f(x) = \sqrt{x^2+3} + x + 1 = \frac{(\sqrt{x^2+3} + x)(\sqrt{x^2+3} - x)}{\sqrt{x^2+3} - x} + 1 = \frac{3}{\sqrt{x^2+3} - x} + 1$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3} - x} + 1 = 1$

$\Longrightarrow$ D : y = 1 est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

3)a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

b) x > -1 , $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{x^2-1+4}{x-1} = x + 1 + \frac{4}{x-1}$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1} = 0 \Rightarrow$ D' : y = x + 1 est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

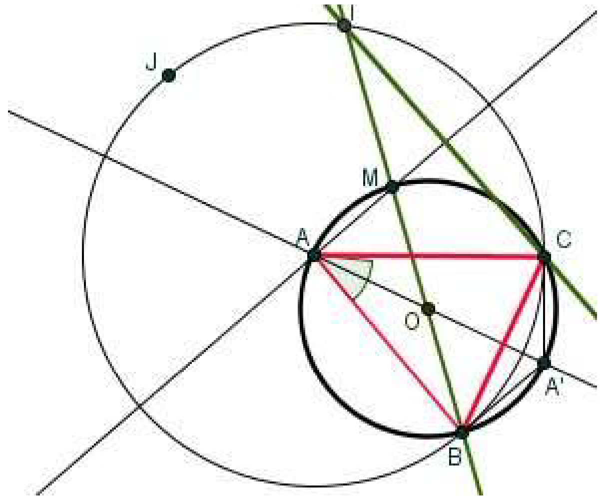
d)soit g (x) = f (x) – (x + 1)

si x < - 1 , $g(x) = \sqrt{x^2+3} > 0 \Rightarrow$ C est au dessus de D

si - 1 < x < 1 , $g(x) = \frac{4}{x-1} < 0 \Rightarrow$ C est au dessous de D'

si x > 1 , $g(x) = \frac{4}{x-1} > 0 \Rightarrow$ C est au dessus de D'

Exercice 4 :



2)b)$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \pi - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ $[2\pi]$

$\equiv \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}$ $[2\pi) \equiv -\frac{3\pi}{8}$ $[2\pi]$

Donc ABC est un triangle isocèle de sommet principal A

3)$(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi$ $[2\pi]$ $\equiv \frac{\pi}{4} + \pi$ $[2\pi]$ $\equiv -\frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $[2\pi] \equiv 2\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ $\equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

$(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})$ $[2\pi]$ $\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ $[2\pi]$ $\equiv \frac{-\pi}{4}$ $[2\pi]$

car [AA') est la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

4)$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}) + (\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{IC})$ $[2\pi]$ $\equiv 0 + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}) + 0$ $[\pi]$ $\equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'})$ $[\pi]$

(car $\overrightarrow{IB}$ *et* $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{MA'}$ *et* $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires puisque (MA') et (IC) sont perpendiculaires à (AM))

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{8}$ $[\pi]$

5)$(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{8}$ $[\pi]$*(angle au centre)*

d'où $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}) \equiv (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$ $[\pi]$ $\Longrightarrow$ I , J , B et C appartiennent à un même cercle