

REPUBLIQUE TUNISIENNE- MINISTERE DE L'EDUCATION **** <b>DEVOIR DE SYNTHESE N : 1</b>		LYCEE AJIM JERBA ☉☉☉ BEN BRAHIM KHALED	
EPREUVE : MATHEMATIQUES	COEFFICIENT : 4	NIVEAU ET SECTION : 3 <sup>e</sup> M	
Premier trimestre	Date : 05 décembre 2011	Durée : 2 heures	

**Commentaires :** *Le sujet comporte deux pages.  
 Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.  
 Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

**Exercice 1** (04 points)

Dans un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on donne les points :

$$A(3\sqrt{3}, 3); B(3\sqrt{3}, -3) \text{ et } C(4\sqrt{3}, 0).$$

1) a. Calculer  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  et  $\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ . En déduire  $\cos(\widehat{CA, CB})$  et  $\sin(\widehat{CA, CB})$ .

b. Déterminer alors la mesure principale de l'angle orienté  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ .

2) a. Préciser les coordonnées polaires de  $A$  et de  $B$ .

b. Placer alors les points  $A, B$  et  $C$ .

c. Donner la mesure principale de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

3) Justifier alors que les points  $O, A, B$  et  $C$  sont cocycliques.

Tracer le cercle passant par ces points en précisant les coordonnées de son centre.

**Exercice 2** (04 points)

$a, b, p$  et  $q$  sont quatre réels tels que  $p = a + b$  et  $q = a - b$ .

1) L'objet de cette question est de factoriser l'expression  $\cos(p) + \cos(q)$ .

a. Montrer que  $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a) \cdot \cos(b)$ .

b. Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

c. Factoriser alors l'expression  $\cos(p) + \cos(q)$ .

2) Application de la formule :

a. Factoriser l'expression  $\cos(x) + \cos(3x)$ .

b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$ .

**Exercice 3** (04 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal.

1) a. Montrer que  $f$  est dérivable à droite en 0.

b. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et que pour tout réel positif  $x$  on a :

$$f'(x) = \frac{(3 + 2\sqrt{x})\sqrt{x}}{2(1 + \sqrt{x})^2}.$$

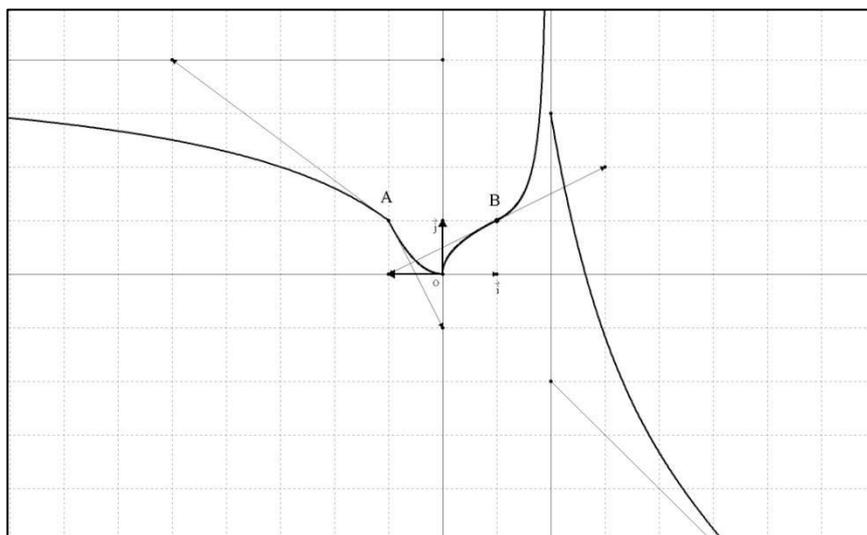
c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point  $I$  d'abscisse 1.

3) Donner une approximation affine du nombre  $f(1,001)$ .

### Exercice 4 (08 points)

Sur la figure ci-dessous, est tracée la courbe représentative notée  $(C)$  dans un repère orthonormal d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .



1) Les droites d'équations  $y = -x$  et  $y = 4$  sont des asymptotes à la courbe  $(C)$ .

Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2) La droite d'équation  $x = 2$  est asymptote à la courbe  $(C)$  à gauche en 2.

Etudier la continuité de  $f$  à gauche et à droite en 2. Conclure.

3) a. La courbe  $(C)$  admet deux demi tangentes au point  $A$ .

Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $(-1)$ .

b. La courbe  $(C)$  admet une demi-tangente horizontale à gauche au point  $O$  et une demi-tangente verticale à droite en ce point.

Donner  $f'_g(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ .

c. Ecrire une équation cartésienne de la tangente à  $(C)$  au point  $B$ .

4) a. Quelles sont les images par  $f$  des intervalles  $]-\infty; 0]$ ,  $[0; 2[$  et  $[2; +\infty[$  ?

b. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet exactement trois solutions dans  $\mathbb{R}$ .

Bon travail  
et Kf  
bonne chance

