

Devoir de synthèse en mathématique N 1

Durée:2 heures

Exercice 1 (3pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Avec justification .

1. Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires de sens contraire tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$ alors $(\vec{u} + 3\vec{v})^2 = :$

- (a) 25
- (b) 13
- (c) 1

2. $\lim_{n \rightarrow 1} -\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} =$

- (a) 1
- (b) 0
- (c) 6

3. Si ABCD un carré de coté 1 alors $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD}$ égal à :

- (a) $-\sqrt{2}$
- (b) -1
- (c) 0

4. La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$ est continue sur:

- (a) \mathbb{R}
- (b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- (c) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Exercice 2 (6pts)

I) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

1. (a) Donner le domaine de définition de g.
(b) Justifier la continuité de g sur $[-4, +\infty[$
(c) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

2. Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

- (a) Déterminer le domaine de définition D_f de f
- (b) Montrer que pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) = g(x)$

(c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f.

II) Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{si } x \in [-4, +\infty[\setminus \{0\} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+5x+4}{x+4} + m & \text{si } x \in]-\infty, -4[\end{cases}$

1. Etudier la continuité de h en 0.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} h(x) = m - 3$
3. Pour quelle valeur de m ; h est continue en (-4) ?
4. On prend $m = 1$. Déterminer le domaine de continuité de h. (Justifier).

Exercice 3 (5pts)

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

- (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $5n(n^3 + 1)$ est divisible par 10
- (b) Développer $(1 + n)^5$.
- (c) Montrer par récurrence sur \mathbb{N} que , $n^5 - n$ est divisible par 10

Exercice 4 (6pts)

Le plan orienté dans le sens direct. Soit \mathcal{C} le cercle de centre Ω et de rayon $R = \frac{5}{2}$. O, A et B trois points de \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et C le point diamétralement opposé à B sur \mathcal{C} .

1. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ puis calculer AB
2. Soit G le point défini par: $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite (CG) recoupe le cercle \mathcal{C} en K

- (a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$
- (b) On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BK). Exprimer le vecteur \overrightarrow{KH} en fonction de \overrightarrow{KB} et en déduire que:

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}KB^2$$

- (c) Montrer que $\frac{KB}{KA} = \sqrt{2}$
 - (d) Calculer les distances KA et KB.
3. On désigne par I le point de rencontre de la bissectrice intérieure de secteur $[KA, KB]$ avec $[AB]$. Calculer AI
 4. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que: $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$
 5. (Γ) et \mathcal{C} se recoupent en K' .
Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{K'A}, \overrightarrow{K'B})$