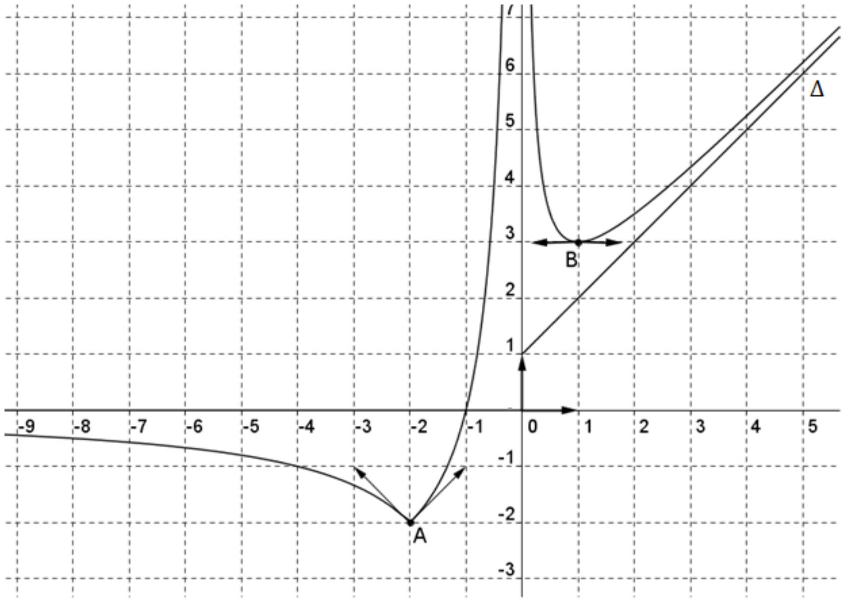
Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 1** *Mathématiques*	*Niveau : 3ème Math*
Date : 10 /12 / 2014	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 2 heures*

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (9 pts)

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f continue sur $IR\setminus\{0\}$.



On sait de plus que :

- La droite Δ est une asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$.
- La droite d'équation : $y=0$ est une asymptote de C_f au voisinage de $-\infty$
- C_f admet deux demi-tangentes au point $A(-2\,;-2)$.
- La tangente à C_f au point $B(1\;;\;3)$ est parallèle à $(O,\vec{i})$.

1) A partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer :

$a/$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$.

$b/$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)+2}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{f(x)+2}{x+2}$.

$c/$ Déterminer une approximation affine de $f(-2{,}001)$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0\;;+\infty[$ par : $g(x)=x^2 f(x)$.

Montrer que g est dérivable en 1 et que $g'(1)=6$.

3) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+1 & si\ x<1\\ g(x) & si\ x\geq 1\end{cases}$.

On désigne par C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

$a/$ Montrer que h est continue sur IR.

$b/$ Etudier la dérivabilité de h en 1. Interpréter géométriquement le résultat.

$c/$ Montrer que h est dérivable sur $]-\infty\;;1[$ et déterminer $h'(x)$.

$d/$ Montrer qu'il existe un point E de C_h d'abscisse dans $]-\infty\;;1[$ où la tangente T est parallèle à la droite D d'équation : $y=-\dfrac{1}{2}x$.

Exercice n°2 : *(6 pts)*

1) Montrer que, pour tous réels a et b on a :

$a/$ $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$.

$b/$ $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$.

2) Montrer que, pour tout $x \in IR$, on a :

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = 2\cos 2x - 1 = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\cos^2 x - 3\sin^2 x\right).\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

$a/$ Déterminer le domaine de définition D de f.

$b/$ Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $f(x) = 2\sin 2x - \sqrt{3}$.

$c/$ Calculer $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, en déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Exercice n°3 : *(5 pts)*

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs I et J et sécants en A et B.

M est un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B et appartenant à l'arc orienté AB.

Les droites (MA) et (MB) recoupent $\mathscr{C}'$ respectivement en R et S. ***(voir figure)***

1) Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi - 2\left(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$.

2) Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{RS}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{RA},\overrightarrow{RS}}\right) + \pi[2\pi]$.

3) En déduire que les droites (MI) et (RS) sont perpendiculaires.

Bonne chance