

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| + x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 5 + \sqrt{x^2 + 3x - 4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2) a/ Montrer que, pour tout $x > 1$, $\sqrt{x^2 + 3x - 4} - x = \frac{3 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + 1}}$.

b/ En déduire que la droite $\Delta : y = x + \frac{13}{2}$ est une asymptote de \mathcal{C}_f .

3) a/ Etudier la dérivabilité de f en (-2) .

b/ Donner une approximation affine de $f(-1,98)$.

4) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice n°2 : (4 pts)

Dans la figure ci-contre, C_1 et C_2 sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} et de sa fonction dérivée f' .

On utilisera le graphique comme source des données.

1) Justifier que C_2 est la courbe de f .

2) a/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-3}{x+2}$ et

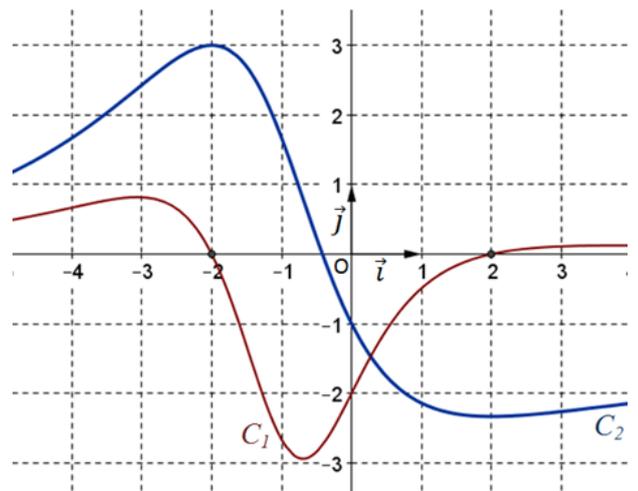
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x f(x) + 6}{x + 2}.$$

b/ Ecrire une équation de la tangente à C_2 au point d'abscisse 0.

3) On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 2x + 4} + b$.

a/ Montrer que : $a = -8$ et $b = -1$.

b/ Dresser le tableau de variations de f .



Exercice n°3 : (5 pts)

- 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.
- 2) On pose $P(t) = 8t^2 - 8t + 1$.

a/ Montrer que $P\left(\cos^2 \frac{\pi}{8}\right) = 0$ et que $P\left(\cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) = 0$.

b/ Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $P(t) = 0$.

c/ En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{3\pi}{8}$.

- 3) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{2+\sqrt{2}} \cos x + \sqrt{2-\sqrt{2}} \sin x$.

a/ Montrer que $F(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.

b/ Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0; 2\pi]$ l'équation : $F(x) = 1$.

Exercice n°4 : (5 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle \mathcal{C} de centre O tel que $(\widehat{AB}; \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. (voir figure sur la feuille annexe que l'on complètera au fur et à mesure).

Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures de ce triangle. P et Q sont les points qui appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ tels que $CP = BQ = BC$.

- 1) a/ Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[BP]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.

b/ Montrer que $(\widehat{CP}; \widehat{QB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

- 2) a/ Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme C en Q et P en B .

b/ Déterminer le centre et l'angle de r .

- 3) a/ Montrer que $(\widehat{IC}; \widehat{IB}) \equiv (\widehat{IP}; \widehat{IC}) [2\pi]$.

b/ En déduire que $(\widehat{IP}; \widehat{IB}) + 2(\widehat{IB}; \widehat{IC}) \equiv 0 [2\pi]$.

c/ Montrer alors que $(\widehat{IB}; \widehat{IC}) = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d/ En déduire que les points I , P et Q sont alignés.

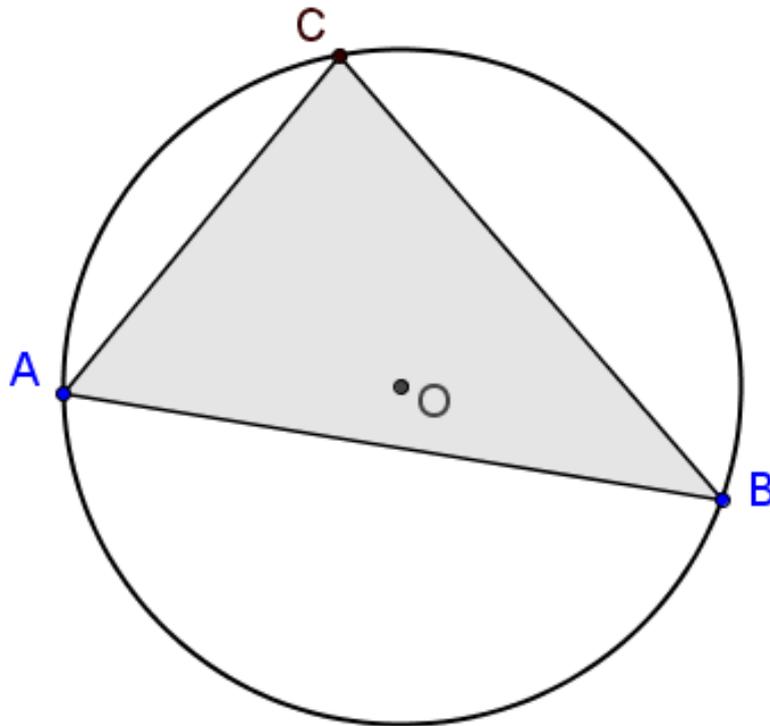
Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n°1 (03 – 01 – 2017)

Nom et prénom :

Classe : 3^{ème} Math



MC

AK

