Lycée Houmet Souk	*Devoir de Synthèse N : 1*	*3 Mathématique 1*
Prof : Loukil Mohamed	*Durée : 2 Heures*	*22 Janvier 2018*

EXERCICE N : 1 (3 points)

On considère , dans le plan muni d'un repère orthonormé , la parabole ***(P)*** *d'équation :* $y = x^2$ *.*

Soit $M (x , x^2)$ *un point de* ***(P)*** *et* ***D*** *la fonction définie sur IR par :* $\mathbf{D} (x) = AM^2$ *avec* $\mathbf{A} (3 , 0)$ *.*

1) *Montrer que pour tout* $x \in IR$ *;* $\mathbf{D} (x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$ *.*

2) *Vérifier que pour tout* $x \in IR$ *;* $\mathbf{D}' (x) = 2 (x - 1) (2x^2 + 2x + 3)$ *.*

3) a) *Dresser le tableau de variations de la fonction* ***D*** *.*

b) *On désigne par* ***B*** *le point de la parabole* ***(P)*** *le plus proche de* ***A*** *.*

Déterminer les coordonnées de ***B*** *.Expliquer*

EXERCICE N : 2 (6 points)

A) *Soit la fonction f définie par :* $f (x) = \dfrac{a x^2 - 3x + b}{x - 1}$ *.*

On désigne par ***(C f)*** *la courbe représentative de f dans le repère orthonormé* $R (O , \vec{i} , \vec{j})$ *.*

1) *Calculer , en fonction de a et b ,* $f'(x)$ *pour tout* $x \in D_{f'}$ *.*

2) *Déterminer les réels a et b , pour lesquelles ,* ***(C f)*** *passe par* $A (0 , - 6)$ *et f admette un extremum en - 1 .*

B) On prend pour la suite : $a = 1$ ***et*** $b = 6$ ***.***

1) *Dresser le tableau de variations de f .*

2) *Préciser les extremums de f et leur nature .*

C) *Soit la fonction g définie sur IR par :*

$$\begin{cases} g(x) = 4 + (2 - x)\sqrt{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ g(x) = f (x) & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

On désigne par ***(C g)*** *la courbe représentative de f dans le repère orthonormé* $R (O , \vec{i} , \vec{j})$ *.*

1) *Montrer que g est continue en 2 .*

2) a) *Etudier la dérivabilité de g en 2 .*

b) *Donner des équations cartésiennes des demi-tangentes à* ***(C g)*** *au point B d'abscisse 2 .*

3) *Montrer que g est dérivable sur* $] - \infty ; 2 [$ *et que pour tout* $x \in] - \infty ; 2 [$ *;* $g'(x) = - \dfrac{3}{2} \sqrt{2 - x}$ *.*

4) *Dresser le tableau de variations de g sur IR .*

EXERCICE N : 3 (6 points)

A) Soit h la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $h(x) = a\cos 2x + b\cos x - \frac{1}{2}$ où a et b sont deux constantes. On désigne par **(Ch)** la courbe représentative de h dans un repère orthonormé .

1) Calculer pour tout $x \in [0, \pi]$, $h'(x)$ en fonction de a et b .

2) Déterminer les réels a et b pour lesquels h admette un extremum en $\frac{2\pi}{3}$ égale à -2 .

B) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \cos 2x + 2\cos x - \frac{1}{2}$.

1) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - \frac{3}{2}$.

2) a) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $f(x) = 0$.

b) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation : $2\cos x + 1 \geq 0$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = -2\sin x\,(1 + 2\cos x)$.

b) Etudier les variations de f .

c) Déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

4) Calculer : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos 2x + 4\cos x - 1}{6x - 2\pi}$.

EXERCICE N : 4 (5 points)

A) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{\ }$, $\vec{\ }$) .

On considère les points A et B et C d'affixes respectives $Z_A = -2$, $Z_B = -1 + i$ et $Z_C = i$.

Soit $f : P \setminus \{A\} \to P$; $M_{(z)} \mapsto M'_{(z')}$ avec : $Z' = \frac{iZ + i + 1}{Z + 2}$.

1) a) Vérifier que **:** $Z' = \frac{i(Z + 1 - i)}{Z + 2}$.

b) Déterminer la nature de l'ensemble (Δ) des points M tels que $|Z'| = 1$.

c) Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points M tels que Z' est un réel .

2) a) Vérifier que pour tout $Z \neq -2$ on a : $Z' - i = \frac{1 - i}{Z + 2}$.

b) En déduire que pour tout $M \neq A$, on a **:** $CM' . AM = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{CM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ $\frac{\pi}{4}(2\pi)$.

c) Prouver alors que si M appartient au cercle ***(C)*** de centre A et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle ***(C ')*** dont on précisera le centre et le rayon .

3) Soit E le point d'affixe $Z_E = -\frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Vérifier que : $Z_E - Z_A = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$.

b) En utilisant la questions **2)** , construire le point $E' = f(E)$.