Lycée secondaire : IBN ROCHD Professeur : Tarek CHOKRY Année scolaire : 2018 / 2019	**Devoir de synthèse N° : 01**	Classe : 3 ème Maths Date : 04 / 12 / 2018 Durée : 02 h

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction, l'organisation et la propreté de la copie.

EXERCICE 01 : (5 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1) Représenter, Δ , l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r\ ;\ \frac{\pi}{3})$ avec $r > 0$.

2) **a)** Construire A le point de l'ensemble Δ tel que : $OA = 2$.

 b) Déterminer les coordonnées polaires, puis cartésiennes du point A.

3) Soit B le point tel que OAB est un triangle direct, isocèle et rectangle en O. On note I le milieu de $[AB]$.

 a) Donner les coordonnées polaires des points B et I.

 b) Déduire leurs coordonnées cartésiennes.

4) Vérifier que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; En déduire $\sin\frac{\pi}{12}$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4\sin(2x) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

EXERCICE 02 : (3 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+4x+m}{4-x^2} & si\ \ x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} & si\ \ 1 < x < 2 \\ \sqrt{x^2-x+1} & si\ \ x \geq 2 \end{cases}$ où m est un réel.

1) **a)** Préciser le domaine de définition de f.

 b) Etudier la continuité de f en 2.

2) **a)** Déterminer la valeur du réel m pour que f soit prolongeable par continuité en -2.

 b) Déduire $f(-2)$.

3) **a)** Pour la valeur trouvée de m, montrer que f est continue en 1.

 b) En déduire le domaine de continuité de f pour la même valeur de m.

EXERCICE 03 : (6 pts)

Soit $f(x) = 2\cos(2x) - 1$ et $g(x) = 1 + \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)$.

1) **a)** Calculer $f(\frac{\pi}{12})$ et $g(\frac{\pi}{12})$.

 b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x+\pi) - f\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 2$.

2) **a)** Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 1 + 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

 b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x) = 0$.

3) **a)** Donner le domaine de définition D_h de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

 b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 2\cos x\,.\,[\cos x - \sqrt{3}\sin x]$.

 c) En déduire que pour tout $x \in D_h$ on a : $h(x) = \frac{1+\sqrt{3}\tan x}{2}$.

4) **a)** Prouver que $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

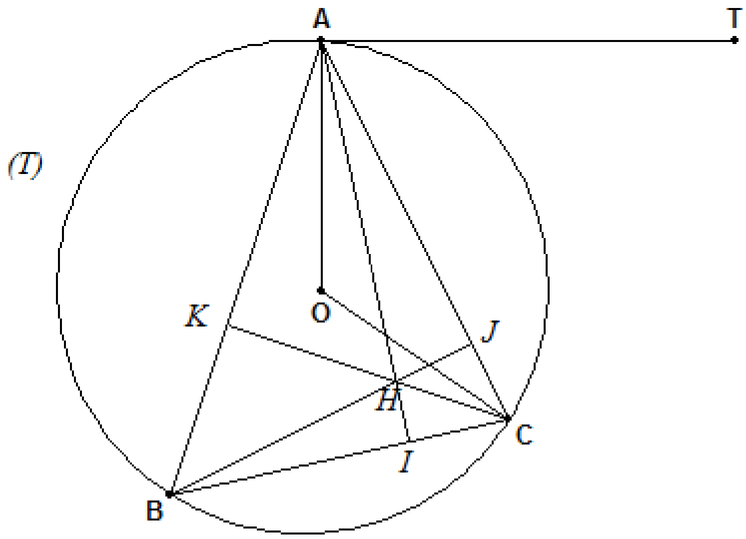
b) En s'aidant du résultat précédent montrer que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; En déduire que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

c) Déterminer les coordonnées polaires du point : $A(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{6}-\sqrt{2})$.

<u>**EXERCICE 04 :**</u> **(6 pts)**

Le plan est orienté dans <u>le sens direct</u>. ABC est un triangle tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{33\pi}{4}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{31\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par (Γ) le cercle de centre O passant par A, B et C.

T est un point du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AT}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. <u>**(Voir figure)**</u>



I) 1) a) Déterminer les mesures principales des angles orientés : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.

b) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AC})$.

2) Soit $(E) = \left\{M \in P\ tq:\ (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$.

a) Vérifier que $B \in (E)$ puis déduire (E).

b) Trouver l'ensemble des points N du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

II) Soit H l'orthocentre du triangle ABC. On désigne par I, J et K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C.

1) a) Vérifier que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ puis déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC})$.

c) Déduire que les angles $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO})$ ont la même bissectrice.

2) a) Etablir que les points B, J, C et K sont situés sur un même cercle à déterminer.

b) Montrer alors que : $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{KJ}})\ [2\pi]$.

c) Déduire que $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{KJ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AT}})\ [2\pi]$.

d) Montrer alors que les droites (JK) et (OA) sont perpendiculaires.