

Devoir de synthèse n°2

Durée : 3heures

3^{ème} Math

Mr: Bouhouch Ameur

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision ont une grande importance...*Exercice n°1:(4pts)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Laquelle?

- 1) Soit le nombre complexe $j = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors la forme trigonométrique de j est égale à :
- a) $\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})$ b) $\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})$ c) $\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})$.
- 2) L'ensemble des points M d'affixe z tels que: $|z-1+2i|=3$ est:
- a) une droite b) un point c) un cercle
- 3) Si $z = \cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})$, alors z^{2008} est égal à :
- a) 0 b) 1 c) i
- 4) Si $A(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{1 - \cos x}$ alors la limite en 0 de A est égale à:
- a) 0 b) 2 c) 4

Exercice n°2 :(6pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Préciser l'ensemble D de définition de f .
- 2) Déterminer les réels a, b et c tels que:
- $$f(x) = x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \text{ pour tout } x \in D.$$
- 3) a) Montrer que f est dérivable sur D et que $f'(x) = \frac{(x^2+1)^3}{(x^3-x)^2}$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) a) Montrer que $(\Delta): y=x$ est une asymptote à (C) au voisinage de l'infini.
b) Déterminer les asymptotes verticales à la courbe (C).
- 5) Montrer que f est une fonction impaire.
- 6) On pose : $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2}$
- a) Vérifier que α et β sont solution de l'équation $f(x)=0$.
- b) En déduire toutes les solutions de l'équation $f(x)=0$.
- 7) a) Résoudre, dans D, l'équation $f(x)=x$.

Voir suite ⇒

- b) Déterminer les points d'intersections de (C) et (Δ).
 c) Etudier la position relative de (C) et (Δ).
 8) Tracer (C) et (Δ).
 9) Soit $k \in \mathbb{R}$. Et P_k la fonction polynôme défini par: $P_k(x) = x^4 - kx^3 - 6x^2 + kx + 1$.
 Vérifier que l'équation $P_k(x) = 0$ admet, quelque soit le réel k , quatre racines distinctes .

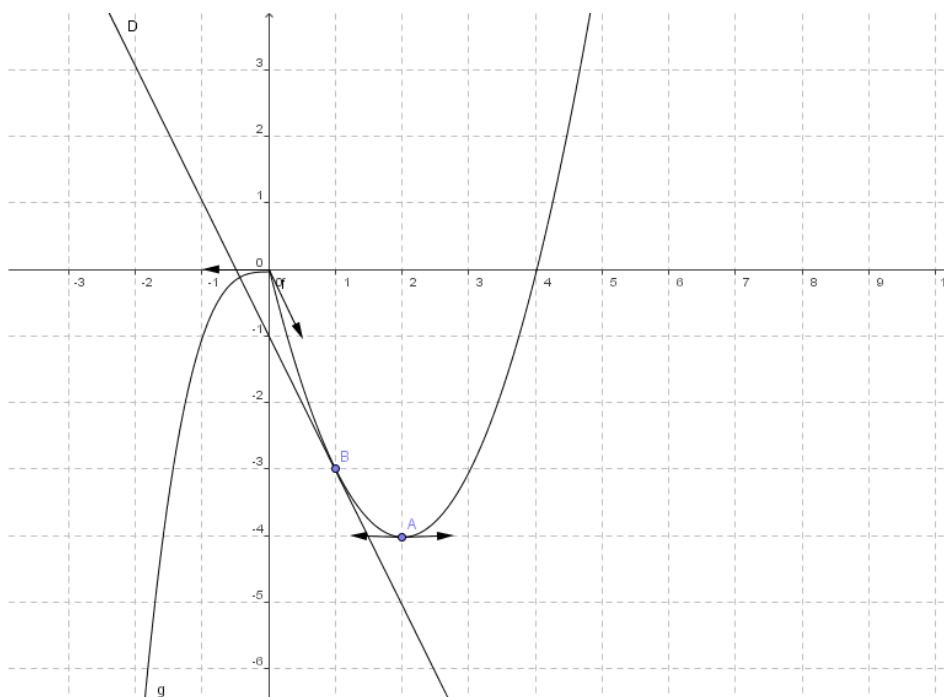
Exercice n°3: (3pts)

Soient les nombres complexes $Z = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ et $Z' = 1 + i$

- 1) Donner la forme trigonométrique de Z et Z' .
 2) a) Donner la forme trigonométrique de ZZ' .
 b) Dédire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 3) a) Donner la forme trigonométrique de $\frac{Z'}{Z}$.
 b) Dédire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice n°4: (4pts)

Soit f une fonction définie par sa représentation graphique (C) suivante :



La droite (D) est la tangente à (C) au point $B(1, -3)$;
 Par une lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 2) Calculer, en justifiant, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Voir suite \Rightarrow

3) Calculer $f'(2)$ et $f'(1)$.

4) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$. (expliquer).

5) Dresser le tableau de variation de f .

6) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

Exercice n°5: (3pts)

Soit $f(x) = \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x) - \sqrt{3}$; $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = 4 \sin(x) \cdot \cos(x + \frac{\pi}{3})$.

2) Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans $[0, 2\pi[$, l'équation $f(x)=0$.

3) Calculer $f(-\frac{\pi}{4})$ et déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

BON TRAVAIL