

## DEVOIR DE SYNTHÈSE N° : 02

## Exercice 1 (3 points)

Dans chacune des questions suivantes il y a une seule réponse exacte, laquelle ?

1) Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $0; \frac{\pi}{2}$  tel que  $\cos x = \frac{1}{3}$ , alors  $\sin(x+\pi) =$  :

- a)  $\frac{2}{3}$                       b)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$                       c)  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2) L'ensemble des solutions de l'inéquation,  $\cos x \leq \frac{1}{2}$  dans  $[0, 2\pi]$  est :

- a)  $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$                       b)  $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$                       c)  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

3) Soit  $f$  une fonction impaire dérivable sur  $\mathbb{R}$  tel que  $f'(2)=1$  et  $f(2)=3$  alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $-2$  est :

- a)  $y=x+1$                       b)  $y=x-1$                       c)  $y=x$

## Exercice 2 (6 points)

Soit  $f$  une fonction dont le tableau de variation est le suivant, on note  $\varphi$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$\dots$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\dots$	$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$	$+\infty$	$\dots$
					$\searrow$	$\nearrow$
					$\dots$	$\dots$

1) a) Donner le domaine de définition de  $f$ .

b) Donner une équation de l'asymptote verticale  $\varphi$ .

2) On admet que  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$

a) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 2$

b) Recopier et compléter le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Montrer que la droite  $\Delta : y=x-2$  est une asymptote oblique à  $\varphi$ .

b) Etudier la position de  $\varphi$  par rapport à  $\Delta$ .

4) Montrer que  $\omega(2,0)$  est un centre de symétrie de  $\varphi$ .

5) Tracer  $\varphi$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

6) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{x^2 - 6x + 2|x-3| + 11}{|x-3| + 1}$

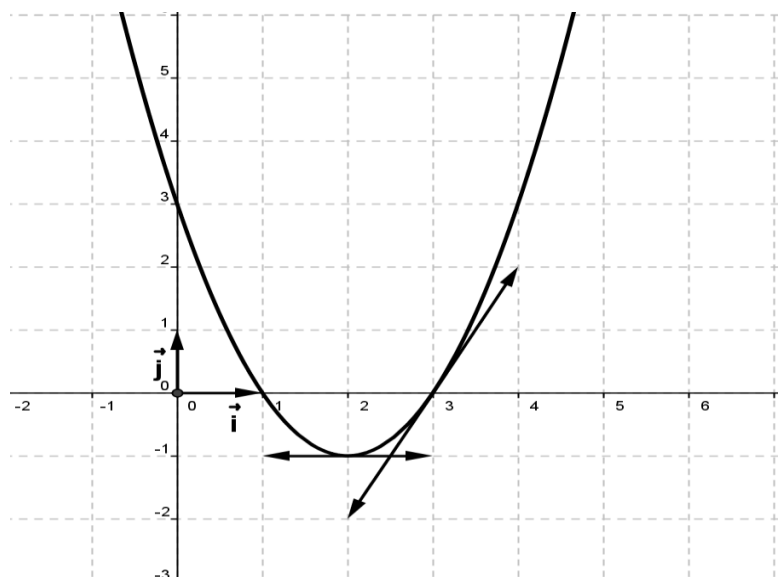
a) Montrer que la droite d'équation  $x=3$  est un axe de symétrie de  $\varphi_g$

b) Montrer que pour tout  $x \in [3, +\infty[$ ,  $g(x) = f(x)$ .

c) En déduire la courbe de  $g$ .

### Exercice 3 (4 points)

La courbe  $\varphi$  ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On admet que  $\varphi$  admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées au voisinage de l'infini.



1) Déterminer graphiquement

a)  $f(2)$ ,  $f'(2)$ ,  $f(3)$  et  $f'(3)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Dresser le tableau de variation de  $f$

d) Le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de  $g$

b) Etudier la dérivabilité de  $g$  à gauche en 1 et à droite en 3

(on pourra remarquer que  $\frac{\sqrt{f(x)}}{x-3} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \frac{f(x)}{(x-3)}$ ). Interpréter graphiquement les résultats

c) Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $] \infty, 1 ] \cup [ 3, + \infty [$ .

### Exercice 4(3.5 points)

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixe respective

$$z_A = \sqrt{3} - i \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad z_C = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

1) Donner la forme cartésienne des nombres complexes suivants ;

$$z_A + z_B \quad ; \quad \frac{z_A}{z_B} \quad \text{et} \quad (z_A + z_B) z_C$$

2)a) Donner la forme Trigonométriques des nombres complexes  $z_A, z_B$  et  $z_C$

b) Justifier que  $O, A$  et  $C$  sont alignés.

c) Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

3)a) Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que  $OBDC$  soit un parallélogramme

b) Déterminer la mesure dans  $[0, 2\pi [$  de l'arc orienté  $\overset{\curvearrowright}{AB}$

### Exercice 5(3.5 points)

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point  $A$  d'affixe  $i$ .

A tout point  $M$  d'affixe  $z \neq 0$ , on associe le point  $M'(z')$  tel que  $z' = \frac{z-i}{z}$

1) a) Déterminer et construire l'ensemble des point  $M$  tel que  $|z'| = 1$

b) Déterminer l'ensemble des point  $M$  tel que  $z'$  soit réel

c) Déterminer l'ensemble des point  $M$  tel que  $z'$  soit imaginaire

2)a) Montrer que si  $M$  décrit la médiatrice du segment  $[OA]$  alors  $M'$  décrit un cercle que l'on précisera

b) \* Vérifier que  $z' - 1 = \frac{-i}{z}$

\* Dédurre que si  $M$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon  $1$  alors  $M'$  décrit un cercle que l'on précisera