Lycée.O.Chatti M'SAKEN **Mr : Bahloul Ridha**	Devoir de Synthèse n°2 ✧✧✧✧✧ **Mathématiques**	**3 ème Math 1** 2 mars 2010 Durée = 3h

EXRRCICE N°1 :* *(3 points)

1) Répondre par vraie ou faux .

   a) 5112546989 est divisible par 11 .

   b) 1245789632580 est divisible par 2 , 3 et 5 .

   c) 1212121212 + 6011 est divisible par 12 .

2) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in IN$; 2^{3n} - 1 est divisible par 7 .

EXERCICE N°2 :* *(4 points)

On considère les deux nombres complexes $Z_1 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$ et $Z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

1) a) Mettre Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique .

   b) Écrire $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme trigonométrique puis sous forme cartésienne .

   c) En déduire les valeurs exactes de cos ($\frac{\pi}{12}$) et sin ($\frac{\pi}{12}$) .

2) a) Mettre $(-Z_2)^n$ où $n \in IN^*$ sous forme trigonométriques .

   b) Déterminer les entiers naturels n tel que $(-Z_2)^n$ soit imaginaire pure .

EXERCICE N° 3:* *(4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct . On désigne par A le point d'affixe i et par B le point d'affixe - i . A tout point M d'affixe le nombre complexe z , ($z \neq -i$), on associe le point M' d'affixe le nombre complexe $z' = \frac{iz}{z+i}$.

1) a) Écris z' sous forme cartésienne lorsque $z = 1 + i\sqrt{3}$.

   b) Déterminer z pour que z' = 1 + 2 i .

2) Déterminer les ensembles suivants : **E** = { M (z) / z' est réel } .

   F = { M (z) / $|z'| = 1$ } .

3) a) Montrer que (z' – i) (z + i) = 1 ;

   b) En déduire que lorsque M' appartient au cercle de centre A et de rayon r (r > 0) alors M appartient a un cercle que l'on précisera .

EXERCICE N°4 :* *(5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^2+2x}{2(x-1)}$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que : $\forall x \in IR \setminus \{1\}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)}$

   b) En déduire les asymptotes à (C) .

2) a) Étudier les variations de f .

b) Écrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 .

c) Étudier la position de (C) par rapport à T .

d) Tracer (C) .

3) Soit g la fonction définie par g (x) = f ($|x|$) . Tracer la courbe de g à partir de (C) .(Expliquer) .

<u>EXERCICE N° 5:</u> (4 points)

Soit m un réel différent de 1 , et f_m la fonction définie par $f_m(x) = \frac{1}{2}(m-1)x^2 - mx + m$.

1) Étudier , suivant les valeurs de m , les variations de f_m (on distinguera deux cas : m>1 et m<1) .

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, que peut – on conclure ?

c) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) Soit x un réel strictement positif et M un point de (C_f) d'abscisse x . on note N le projeté orthogonal de M sur $(O, \vec{\jmath})$ et P le projeté orthogonal de M sur $(O, \vec{\imath})$.

a) Montrer que le périmètre p (x) du rectangle OPMN est donnée par : $p(x) = x^2 - 2x + 4$.

b) Étudier les variations de p. En déduire la valeur de x pour que le périmètre du rectangle OPMN soit minimal .

BON TRAVAIL