



3^{ème} Maths : M_{1+2+3}
Date : le 03 / 04 / 2011

Durée : 3 heures
Coefficient : 4

Enseignants : Belkacem. H
Ghadhab. L – Machta. F

Exercice N°1 :

3 points

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

- Soit z un nombre complexe. Le conjugué de $iz + 1$ est :
 - $-iz + 1$
 - $-i\bar{z} - 1$
 - $-i\bar{z} + 1$
- Le nombre complexe $z_1 = -2(\cos \theta + i \sin \theta)$ est égal à :
 - $[2, \theta + \pi]$
 - $[-2, \theta]$
 - $\left[2, \theta + \frac{\pi}{2}\right]$
- Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z alors un argument de $\frac{\bar{z}}{iz}$ est :
 - $-\frac{5\pi}{6}$
 - $-\frac{\pi}{2}$
 - $-\frac{2\pi}{3}$
- Si z un nombre complexe tel que $|z| = 2$ alors $|z\bar{z} + 3i| =$
 - $\sqrt{13}$
 - 5
 - 1

Exercice N° 2:

5 points

Soit u la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$
- Montrer que la suite u est croissante.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leq \frac{1}{3^n}$
- Déterminer la limite de la suite u .
- Soit v la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k$
 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $3 - \frac{1}{3^k} \leq u_k \leq 3 + \frac{1}{3^k}$
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3 + \frac{3}{n} - \frac{3}{2n} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \leq v_n \leq 3 + \frac{3}{n} + \frac{3}{2n} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$
 - En déduire la limite de la suite v



Exercice N° 3:

5 points

Dans le plan complexe \mathcal{P} , muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ,

On désigne par f l'application qui à tout point M de \mathcal{P} , d'affixe $z \neq 2$, associe le point M'

d'affixe z' par : $z' = \frac{iz}{z-2}$.

Soit les points A, B et C d'affixes respectives: $z_A = i$ et $z_B = 2$

- 1) Déterminer l'image de A par f .
- 2) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.
- 3) a – Vérifier que : $(z'-i)(z-2) = 2i$.

b – En déduire :

- la valeur de $AM' \times BM$.

et

- que $(\vec{u}, \widehat{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\vec{u}, \widehat{BM}) [2\pi]$.

Rappel : $(\vec{u}, \widehat{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$

c – Montrer que si M appartient au cercle ζ de centre B et de rayon 2, alors le point M' appartient au cercle ζ' dont on précisera le centre et le rayon.

d – Soit D un point d'affixe $z_D = 1 + \sqrt{3} + i$ et D' l'image de D par f .

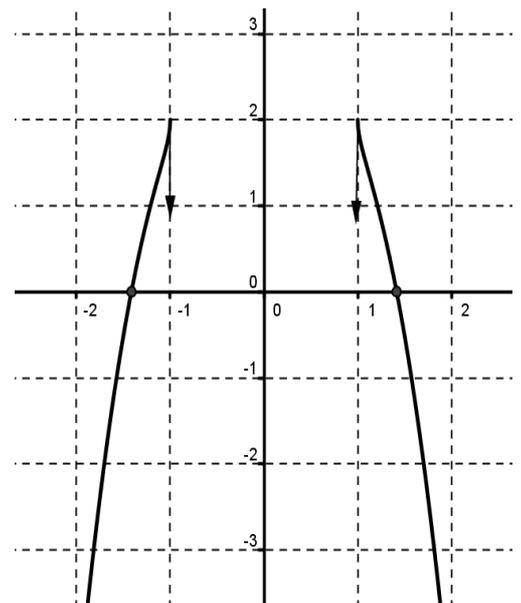
- i. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z_D - 1$.
- ii. Déterminer la valeur de AD' et une mesure de $(\vec{u}, \widehat{AD'})$.
- iii. En déduire une construction de D' .

Exercice N° 4:

7 points

I – La courbe C_g ci-contre représente une fonction g définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par $g(x) = 2 - x^2 \sqrt{x^2 - 1}$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Calculer $g(\sqrt{2})$ et $g(-\sqrt{2})$.
- 2) Par une lecture graphique :
 - a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 - b- g est elle dérivable à droite en 1 ? justifier et déterminer $\lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{g(x) - 2}{x - 1}$.
 - c- Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$



II – Soit f la fonction définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} - x + 1$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1)

a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1 . Interpréter les résultats.

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter les résultats

c- Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote à C_f en $+\infty$ et la droite Δ' d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote à C_f en $-\infty$

2)

a- Montrer que pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$

b- Déterminer le tableau de variations de f

3) Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de C_f

4) Construire Δ , Δ' et C_f .

