

### Exercice1

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par A et B les points d'affixes respectives :  $Z_A = 2i$  et  $Z_B = -i$ .

A tout point M différent de A d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' défini par :  $z' = \frac{z}{iz+2}$

- 1) a) Déterminer la forme cartésienne de z' lorsque  $z = 2+i$   
b) Déterminer la forme cartésienne de z lorsque  $z'=1-i$   
c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que z' soit imaginaire pur.
- 2) a) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$  on a :  $(z'+i)(z-2i) = 2$  et que  $BM'.AM = 2$ .  
b) En déduire que si M varie sur le cercle (C) de centre A et de rayon 1 alors M' varie sur un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.  
c) Déterminer et construire l'ensemble  $\Delta$  des points M(z) tel que  $|z'|=1$ .
- 3) Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z = a + i$  où  $a \in \mathbb{R}$  on désigne par  $\theta$  un argument de z .

Montrer que  $z' = \frac{z}{iz}$ . En déduire un argument de z' en fonction de  $\theta$ .

- 4 a) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on a :  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = (z-\sqrt{2})^2 + 2$ 
  - a) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ .  
On notera :  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation (E) avec  $\text{Im}(z_1) < 0$  .
  - b) Mettre  $z_1$  sous forme trigonométrique; en déduire la forme trigonométrique de  $z_2$
  - c) Soit C le point d'affixe :  $z_c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$   
Montrer le triangle OAC est isocèle et que  $(\vec{oc}, \vec{oA}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ .
  - d) Soit I le milieu du segment [AC] et  $z_I$  son affixe.  
Donner un argument de  $z_I$  ainsi que sa forme cartésienne.  
En déduire les valeurs exactes  $\cos(\frac{\pi}{8})$  et  $\sin(\frac{\pi}{8})$ .

### Exercice2

I. Soit g la fonction défini sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par  $g(x) = x \sin x + \cos x - 1$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire le signe de g(x) pour tout  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

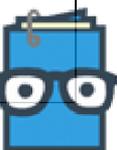
II. Soit f la fonction définie sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par :  $\begin{cases} f(x) = 2(\frac{1-\cos x}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- a) Montrer que f continue en 0.
- b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser f'(0).
- c) Ecrire une équation de la tangente T à  $(C_f)$  on point d'abscisse 0.
- d) Etudier la parité de f.

1) a) Montrer que pour tout  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$  on a :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2) tracer  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 3cm).



### Exercice3

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$  on désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a) vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  ; on a  $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$   
b) Dresser le tableau de variation de  $f$
2. a) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  que l'on précisera  
b) Montre que le point I (1,0) est un centre de symétrie à la courbe (C)  
c) Tracer la courbe (C).
3. Soit le point A (0,-1)  
a) Montrer qu'il existe une seule tangente (T) à la courbe (C) passant par A.  
b) Donner une équation cartésienne de (T) et la tracer.
4. Soit  $m$  un paramètre réel et  $D_m$  la droite d'équation  $y = mx - 1$   
a) Discuter suivant les valeurs de  $m$  le nombre des points d'intersection de la courbe (C) et la droite  $D_m$   
b) Dans le cas où  $D_m$  coupe (C) en deux points  $M'$  et  $M''$ . On désigne par J le milieu du segment  $[M'M'']$ . Donner les coordonnées de J puis déterminer l'ensemble des points J lorsque  $m$  varie.
5. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{f(x)}$   
a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$   
b) Dresser le tableau de variation de  $g$   
c) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{g(x)}{x} \right]$  . Interpréter graphiquement ce résultat.  
d) Tracer dans le même repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $\tau$  de  $g$  avec une autre couleur.