L . S . O.CHATTI . M'SAKEN
Le : 06/03/2012

DEVOIR DE synthese N°2
Durée 3 heures

Prof : Karmous abdelhamid
Classe : 3 M_2

Exercice1

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives : $Z_A = 2i$ et $Z_B = -i$.

A tout point M différent de A d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z}{iz+2}$

1) a) Déterminer la forme cartésienne de z' lorsque z = 2+i
   b) Déterminer la forme cartésienne de z lorsque z'=1- i
   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que z' soit imaginaire pur.
2) a) Montrer que pour tout z ∈ $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ on a : (z'+i).(z-2i) =2 et que BM'.AM = 2.
   b) En déduire que si M varie sur le cercle (C) de centre A et de rayon 1 alors M' varie sur un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.
   c) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M(z) tel que |z'|=1.

3) Soit z ∈ $\mathbb{C}$ tel que z = a + i où a∈ R on désigne par θ un argument de z .

   Montrer que $z' = \frac{z}{i\bar{z}}$. En déduire un argument de z' en fonction de θ.

4 a) Montrer que pour tout z ∈ $\mathbb{C}$ on a : $z^2 - 2\sqrt{2}\, z + 4 = (z-\sqrt{2})^2+2$

   a) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{2}\, z+4=0$.
      On notera : z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) avec Im (z_1) < 0 .
   b) Mettre z_1 sous forme trigonométrique; en déduire la forme trigonométrique de z_2
   c) Soit C le point d'affixe : $z_C = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
      Montrer le triangle OAC est isocèle et que$(\widehat{\overrightarrow{oc}, \overrightarrow{oA}}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.
   d) Soit I le milieu du segment [AC] et z_I son affixe.
      Donner un argument de z_I ainsi que sa forme cartésienne.
      En déduire les valeurs exactes cos ($\frac{\pi}{8}$) et sin ($\frac{\pi}{8}$).

Exercice2

I. Soit g la fonction défini sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par g(x) = x sin x+cos x - 1
   1) Dresser le tableau de variation de g.

   2) En déduire le signe de g(x) pour tout x $\in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

II . Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} f(x) = 2(\frac{1-cosx}{x}) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   a) Montrer que f continue en 0.
   b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser f'(0).
   c) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) on point d'abscisse 0.
   d) Etudier la parité de f.
   1) a) Montrer que pour tout x∈ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ on a :$f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$
      b) Dresser le tableau de variation de f
   2) tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 3cm).

Exercice3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$ on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) vérifier que pour tout x ∈ R \ {1} ; on a $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$
   b) Dresser le tableau de variation de f
2. a) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 que l'on précisera
   b) Montre que le point I (1,0) est un centre de symétrie à la courbe (C)
   c) Tracer la courbe (C).
3. Soit le point A (0,-1)
   a) Montrer qu'il existe une seule tangente (T) à la courbe (C) passant par A.
   b) Donner une équation cartésienne de (T) et la tracer.
4. Soit m un paramètre réel et D_m la droite d'équation y = mx - 1
   a) Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de la courbe (C) et la droite D_m
   b) Dans le cas où D_m coupe (C) en deux points M'et M''. On désigne par J le milieu du segment [M'M''].Donner les coordonnées de J puis déterminer l'ensemble des points J lorsque m varie.
5. Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$
   a) Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$
   b) Dresser le tableau de variation de g
   c) Calculer : $\lim_{x\to+\infty}[\frac{g(x)}{x}]$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   d) Tracer dans le même repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe τ de g avec une autre couleur.