Lycée Ali B.Bembla	Devoir de synthèse n°2 Mathématiques	Classe $3^{ème}$ Maths
Date 08/03/2013	Prof :Mosrati chawki	Durée 3 heures

Exercice :1 (4 pts)

On considère deux entiers naturels non nul a et b tel que a + b = 23.

1/ Montrer que a et b sont premier entre eux.

2/ Déterminer l'ensemble des diviseurs de 126.

3/ En déduire les couples (a, b) tel que a < b et $a \vee b = 126$.

4/ Soit dans INxIN l'équation E : 9x - 14y = 1 .

a- Vérifier que (11 ,7) est une solution de E.

b- Résoudre l'équation E.

5/ Soit c un entier naturel qui divisé par 9 donne pour reste 4 et divisé par 14 donne pour reste 5. Quel est le reste de la division euclidienne de c par 126.

Exercice :2 (5 pts)

On considère dans le plan orienté un triangle IQP tel que : IQ = IP et $\left(\overrightarrow{IQ};\overrightarrow{IP}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par Ω le milieu de [PQ] et R la rotation de centre Ω et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Montrer que R(P) = I.
   b) Caractériser RoR.
   c) En déduire que R(I) = Q.

2) Soit A un point du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [IP] privé de I, P et Ω. La droite (AI) coupe la droite issue de Q et perpendiculaire à (IA) en B.

a) Déterminer les images des droites (AI) et (AP) par R.

b) En déduire R(A).

c) Déterminer l'ensemble des points B lorsque A varie sur $\mathcal{C}_1$.

3) On désigne par $\mathcal{C}_2$ le cercle circonscrit au triangle IPQ. Les droites (AP) et (AI) recoupent $\mathcal{C}_2$ en E et J.

a) Montrer que le triangle ΩEJ est rectangle isocèle.

b) Montrer que BJ = AE = AI.

Exercice : 3 (5 pts)

1) a- Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{h}.\dfrac{1}{\sin h}=\dfrac{1}{2}$.

b- En déduire que $\lim\limits_{x\to -(\frac{\pi}{2})^+}\dfrac{1+\sin x}{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos x}=\dfrac{1}{2}$.(On pourra poser $X = x + \dfrac{\pi}{2}$)

2) Le plan étant muni du repère o.n. R=$\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soit la fonction f définie sur $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sin x}{\cos x} \text{ si } x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(-\dfrac{\pi}{2})=0\end{cases}$.

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans R.

a- Montrer que f est continue à droite en $-\dfrac{\pi}{2}$.

b- Montrer que f est dérivable à droite de $-\dfrac{\pi}{2}$, et préciser $f'_d(-\dfrac{\pi}{2})$.

c- Montrer que f est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ et calculer f'(x).

d- Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe (C).

3) Soit t un réel de l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ et soit M le poit de coordonnées (t , f(t)), la tangente à la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse t'. Monter que t' = t - cost.

Exercice : 4 (6 pts)

A/ Le plan est rapporté à un repère o.n. $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g soit tangente à la droite (T)

d'équation y = 4x + 3 au point I(0 , 3).

B/ Soit la fonction f : $x\mapsto\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$.

1) a- Déterminer les réelles α et β tel que $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}$.

b- En déduire que y = 3 est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a- Montrer que le point I(0 , 3) est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

b- Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport a la tangente (T) en I .

4) construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

C/ Soit la fonction h définie sur IR par $h(x)=\begin{cases}f(x) \text{ si } x<0\\ 3+\sqrt{x^2+x} \text{ si } x\geq 0\end{cases}$

1) Montrer que h est continue en 0

2) Etudier la dérivabilité de h à droite de 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Montrer que la droite $\Delta : y = x+\dfrac{7}{2}$, est une asymptote à la courbe de $\mathscr{C}_h$ au voisinage de $+\infty$.

4) Dresser le tableau de variation de h.

5) Tracer la courbe de $\mathscr{C}_h$ dans le même repère $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.