

**DEVOIR DE SYNTHESE N° 2**  
**Epreuve : Mathématiques**

**Mars 2014**

**Section : 3<sup>ième</sup> Math**

**Durée : 3 h**

**Prof : Arfaoui - khaled**

**Exercice n°1** ( 5pts)

Soit ABCD un carré de centre O tel que  $(\overline{AB} \wedge \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  ;

$E = S_{(AD)}(O)$  ;  $I = S_C(B)$  ;  $(AE) \cap (BC) = \{J\}$  et k le milieu de  $[IJ]$

1/ faire un schéma

2/ a) Montrer qu'il existe une unique rotation R tel que tels que  $R(A) = C$  et  $R(E) = O$   
b) Déterminer l'angle et le centre de la rotation R

3/ a) Déterminer  $R(AB)$  et  $R(BD)$   
b) En déduire  $R(B) = I$

4/ Soit  $R'$  une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  tel que  $R'(J) = E$  et  $R'(E) = I$

a) Déterminer  $R' \circ R'(J)$   
b) Déduire que K est le centre de  $R'$

5/ Qu'elle est la nature de  $RoR'$  ? justifier votre réponse .

**Exercice n°2** (3 pts)

1/ a) Montrer que :  $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \cos(x + \frac{\pi}{6})$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0 ; 2\pi[$  , l'équation :  $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

2/ Soit f la fonction définie par  $f(x) = \frac{2 \cos(2x - \frac{\pi}{6})}{3 \cos x - \sqrt{3} \sin x}$

a) Déterminer le domaine  $D_f$  de définition de f

b) Montrer que pour tout x de  $D_f$  :  $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(x + \frac{\pi}{6})$

c) Résoudre dans  $[0 ; 2\pi[$  , l'inéquation :  $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$



### Exercice n°3 (5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les points

A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = -1 - i$ ,  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$  et  $z_C = \sqrt{3} - i$

1/ a) Placer les points A, B et C

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle

c) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes  $z_A^2$  et  $\frac{z_A}{z_B}$

2/ a) Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$

b) Déterminer une écriture trigonométrique du nombre complexe  $\frac{z_A}{z_B}$

c) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3/ a) Montrer que  $OB = OC$

b) Déterminer la mesure principale de l'angle  $(\overline{OC}; \overline{OB})$

c) En déduire que B est l'image de C par une rotation que l'on précisera

4/ Déterminer et construire les ensembles suivants

$$E = \{ M(z) \in P \text{ tel que } |z + 1 + i| = 2 \}$$

$$F = \{ M(z) \in P \text{ tel que } |iz + \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} - i| \}$$

### Exercice n°4 (7 pts)

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$ . On note  $\xi_f$  sa courbe

Représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm)

1/ a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ . Interpréter graphiquement ce résultat

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et Interpréter graphiquement ce résultat

2/ a) Montrer que f est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout réel x,  $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3/ a) Déterminer une équation de la tangente T à  $\xi_f$  au point d'abscisse 0

b) Etudier la position de  $\xi_f$  par rapport à T

c) Tracer T et  $\xi_f$

4/ Soit g la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = f(|x|) + 1$

a) Etudier la parité de g

b) Montrer que la courbe de g se déduit de la courbe de f par une transformation que l'on précisera

c) Tracer dans le même repère et avec une autre couleur la courbe de g

