Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 2** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 04 / 03 / 2014	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 3 heures

Exercice n°1 : (6,5 pts)

A- Questions préliminaires :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

On pose : $aff\left(\vec{u}\right) = x + iy$ et $aff\left(\vec{v}\right) = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des réels.

1) Montrer que : $\dfrac{aff\left(\vec{v}\right)}{aff\left(\vec{u}\right)} = \dfrac{xx'+yy'}{x^2+y^2} + i\dfrac{xy'-x'y}{x^2+y^2}$.

2) En déduire l'équivalence :

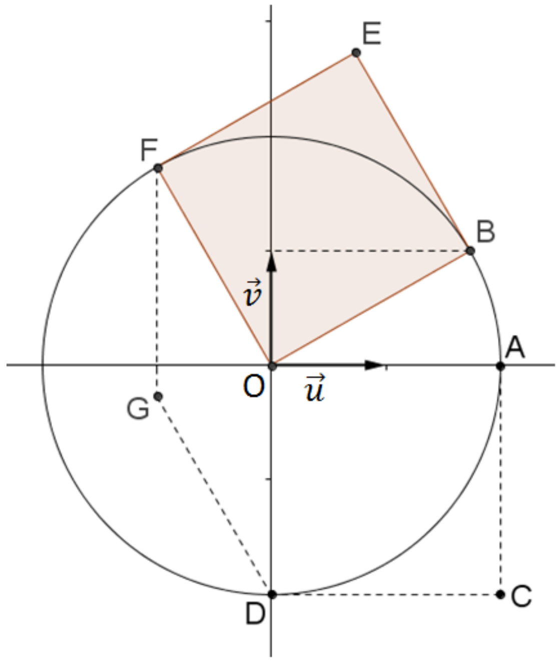
($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux) si, et seulement si ($\dfrac{aff\left(\vec{v}\right)}{aff\left(\vec{u}\right)}$ est imaginaire).

B- 1) $a/$ Vérifier que, pour tout nombre complexe z on a : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = \left(z - \sqrt{3}\right)^2 + 1$.

$b/$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2. A est le point d'affixe $z_A = 2$. B est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\operatorname{Im}(B) = 1$ et $\operatorname{Re}(B) > 0$. On construit le carré direct $OBEF$ (*voir figure*).



$a/$ Montrer que : $z_B = \sqrt{3} + i$ et que $z_F = -1 + i\sqrt{3}$.

$b/$ Déterminer la forme algébrique de z_E, puis vérifier que $z_E = (1+i)z_B$.

$c/$ Ecrire z_E sous la forme trigonométrique.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

3) Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2 - 2i$ et $z_D = -2i$. On construit le point G tel que $OFGD$ est un parallélogramme.

$a/$ Montrer que : $z_G = i\left(z_B - 2\right)$.

$b/$ Montrer que : $\dfrac{z_E - z_G}{z_C - z_G} = i$, en déduire que le triangle CEG est rectangle et isocèle.

Exercice n°2 : (6,5 pts)

1) Soit u la fonction définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par : $u(x) = x\sin x + \cos x$.

$a/$ Etudier les variations de u.

$b/$ Montrer que l'équation : $u(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ une solution unique α.

$c/$ Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $u(x)$ dans $[0\ ;\ \pi]$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ \pi]$ par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$a/$ Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ \pi]$, $f'(x) = -\dfrac{u(x)}{x^2}$.

$b/$ Etablir le tableau de variations de f.

$c/$ Montrer que : $f(\alpha) = -\sin\alpha$.

3) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

$a/$ Déterminer l'équation réduite de T.

$b/$ Soit $h(x) = \cos x + \dfrac{2}{\pi}x^2 - x$, $\quad x \in [0\ ;\ \pi]$.

Déterminer $h'(x)$ et $h''(x)$.

$c/$ Etudier les variations de h'. Calculer $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, en déduire le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

$d/$ Etudier les variations de h, en déduire que $h(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0\ ;\ \pi]$.

$e/$ Déduire, de ce qui précède, la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T pour $x \in]0\ ;\ \pi]$.

Exercice n°3 : (3.5 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Déterminer le domaine de définition de f, noté D.

$b/$ Montrer que f est 2π-périodique.

$c/$ Montrer que la droite $\Delta : x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \dfrac{\cos x \sin^2 x(\sin x - 3)}{(\sin x - 1)^3}$.

$b/$ Dresser le tableau de variations de f sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$c/$ Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]\cap D$ de la feuille annexe.

Exercice n°4 : ***(3.5 pts)***

Une urne contient quatre boules blanches numérotées 1, 2, 3,4 et quatre boules noires numérotées 0, 1, 2, 3 et deux boules vertes numérotées 0, 1.

1) On tire simultanément trois boules. Déterminer le nombre de tirages donnant :
   $a/$ Trois boules de même couleur.
   $b/$ Au moins une boule blanche.
   $c/$ Une somme paire de chiffres.
2) On tire successivement et sans remise cinq boules. Déterminer le nombre de tirages donnant :
   $a/$ La boule portant le numéro 4.
   $b/$ Exactement trois boules blanches.
   $c/$ Un produit nul de chiffres.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n° 2 (04 – 03 – 2014)

Nom et prénom :………………………………………… *Classe : 3 ème Math*