Lycée Houmet Souk	Devoir de Synthèse N : 2	3 Mathématique 2
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 3 Heures	12 - 03 - 2016

EXERCICE N : 1 (3.5 points)

*Une urne contient **neuf** jetons , trois blancs numérotés 1 , 2 , 2 , quatre rouges numérotés 1 , 1 , 2 , 3 et deux noirs numérotés 1 , 1 .*

1) *On tire au hasard et **simultanément trois** jetons de l'urne .*

Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

a) A *: Obtenir trois jetons de même couleur .*
b) B *: Obtenir trois jetons portant des numéros pairs .*
c) C *: Obtenir au moins un jeton blanc .*
d) D *: Obtenir un seul jeton rouge et exactement deux jetons portant des numéros impairs .*

2) *On tire **successivement** et **sans remise quatre** jetons de l'urne .*

Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

a) E *: Obtenir exactement deux jetons rouges .*
b) F *: le premier jeton tiré est blanc .*
c) G *: La somme des numéros obtenus est égal à 6 .*

EXERCICE N : 2 (4 points)

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}$.

1) a) *Montrer que pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - 1 = \dfrac{-1}{(U_n+\sqrt{1+U_n^2})\sqrt{1+U_n^2}}$.*

b) *Montrer que pour tout entier naturel n ; $0 < U_n \leq 1$*

c) *Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN .*

d) *En déduire que la suite (U_n) est convergente .*

2) *Soit la suite réelle (V_n) définie sur IN par : $V_n = (\dfrac{1}{U_n})^2$.*

a) *Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.*

b) *Exprimer V_n en fonction de n .*

c) *Déduire que pour tout $n \in IN$, $U_n = \sqrt{\dfrac{1}{1+n}}$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.*

3) *Pour tout $n \in IN$, On pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$. Montrer que $\sqrt{n+1} \leq S_n$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.*

EXERCICE N : 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

*On désigne par **($\mathscr{C}$)** le cercle de centre O et de rayon 1 et par A et B les points d'affixes respectives :*

$\boldsymbol{a} = \sqrt{3} + i$ et $\boldsymbol{b} = 1$.

1) a) *Donner la forme trigonométrique de* $\boldsymbol{a}$.

b) *Construire le point A .*

2) *Soit C le point d'affixe* $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{a} - 1}{1 - \overline{\boldsymbol{a}}}$.

a) *Sans écrire* $\boldsymbol{c}$ *sous forme cartésienne , vérifier que* $\boldsymbol{c}\overline{\boldsymbol{c}} = 1$.

b) *En déduire que le point C appartient au cercle* **($\mathscr{C}$)** .

c) *Sans écrire* $\boldsymbol{c}$ *sous forme cartésienne , Montrer que* $\dfrac{\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}$ *est un réel .*

d) *Interpréter graphiquement le résultat précèdent puis déduire la construction du point C .*

3) a) *Ecrire* $\boldsymbol{c}$ *sous forme cartésienne*

b) *Soit* θ *un argument du nombre complexe* $\boldsymbol{c}$ *. Montrer que :* $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{5 - 2\sqrt{3}}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}}$

EXERCICE N : 4 (4.5 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x - 2}$.

*On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé **R** (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) .*

1) a) *Dresser le tableau de variations de f .*

b) *Montrer que la droite* $\Delta : y = 2x - 3$ *est une asymptote oblique de **(C f)** .*

c) *Construire (**C f**) dans le repère orthonormé **R** .*

2) *On pose :* $\Omega(2, 1)$, $\vec{I} = \vec{i} + 2\vec{j}$ *et* $M_{(X,Y)}$ *dans le repère **R'** (Ω , $\vec{I}$, $\vec{j}$) .*

a) *Prouver que :* $M_{(X,Y)}$ *est un point de (**C f**) si et seulement si* $Y = \dfrac{2}{X}$.

b) *En déduire la nature de (**C f**) et ses caractéristiques dans le repère **R'** .*

3) *Soit la fonction g définie par* $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 3\left|x - 1\right| + 5}{\left|x - 1\right| - 1}$.

a) *Montrer que la droite* $\boldsymbol{D} : x = 1$ *est un axe de symétrie pour la courbe (**C g**) de g .*

b) *Expliquer comment peut-on obtenir (**C g**) à partir de (**C f**) puis tracer (**C g**) .*

EXERCICE N : 5 (4 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct ,on considère un triangle équilatéral ABC tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ *et un point D du segment [AB] distinct de A et B .*

La parallèle à (AC) passant par D coupe (BC) en E et la parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en F .

1) *Soit* **R** *la rotation de centre D et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *.*

a) *Déterminer* **R** *(B) et* **R** *(F) . Justifier votre réponse .*

b) *En déduire que AE = BF et* $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BF}}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$ *.*

2) *Soit G le centre de gravité du triangle ABC et* **R'** *la rotation de centre G et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$ *.*

a) *Déterminer* **R'***(A) .*

b) *Montrer que* **R'** *(E) = F .*

c) *Montrer que les points G , E , C et F appartiennent à un même cercle .*

3) *Soit* Δ *la droite passant par B et parallèle à (AC) et* **r** *la rotation de centre B et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$ *.*

a) *Justifier que :* $r = S_{(BC)} \circ S_{\Delta}$ *.*

b) *Pour tout point M du plan , on note :* $M_1 = S_{\Delta}(M)$ *et* $M_2 = r(M)$ *.*

Montrer que les points M_1 *et* M_2 *sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera*